

IL RILIEVO TOPOGRAFICO

Il rilievo topografico viene incluso in diverse classificazioni in base ad alcune sue caratteristiche. Molti autori lo definiscono anche rilievo indiretto in quanto le misure non vengono prese direttamente dall'oggetto, ma attraverso strumenti, a contenuto tecnologico medio-alto, che ne permettono l'acquisizione. Altri ancora lo definiscono rilievo strumentale poiché si avvale appunto di diversi tipi di strumenti. Un altro elemento che differenzia il rilievo diretto dalla topografia (ed anche dalla fotogrammetria) è il fatto che nel primo vengono prelevate principalmente misure lineari, mentre negli altri si sfruttano le proprietà delle intersezioni dei raggi proiettivi e visuali, utilizzando misure derivate da valori angolari.

In particolare fin dal XV secolo le modalità di acquisizione dei dati ruotano sostanzialmente intorno alla possibilità di desumere informazioni attraverso il ricorso ai principi di proiezione e sezione che, nel tempo, hanno dato origine a due distinte metodologie.

In un metodo le misure sono ricavate soprattutto sezionando con un piano il fascio di raggi proiettanti che, partendo da un punto noto descrivono la forma dell'oggetto (intersecazione della piramide visiva): dalla prospettiva legittima alla fotogrammetria digitale.

Nell'altro metodo i punti singolari dell'oggetto sono definiti come intersezione di due distinte visuali che hanno origine in due punti noti, e quindi attraverso la risoluzione dei triangoli che si formano. A questa seconda famiglia appartiene appunto la topografia. Il semplice principio della triangolazione, o dell'intersezione in avanti, permette di definire l'oggetto attraverso la misura di angoli, mentre la misura di distanze è ridotta al minimo. Questo è uno dei motivi dello sviluppo continuo della topografia: la misura di angoli è un problema risolvibile, mentre la misura diretta di lunghe distanze, tra punti a volte inaccessibili, ha sempre costituito un problema di difficile risoluzione.

La precisione che la topografia ha raggiunto nel corso dei secoli è connessa agli sviluppi del calcolo e della tecnica. La trigonometria, il calcolo logaritmico da una parte e l'avanzamento tecnologico della strumentazione dall'altra, hanno continuato ad apportare migliorie nell'intero processo di acquisizione e calcolo. Negli ultimi anni l'introduzione del calcolatore e l'utilizzo dei principi elettromagnetici hanno permesso ulteriori innovazioni.

Tutte queste migliorie hanno contribuito a modificare la topografia degli inizi e la relativa metodologia rendendola anche complessa in alcuni aspetti. Resta comunque

assodato che la topografia si configura come uno strumento valido per la conoscenza del patrimonio urbano e architettonico, dotato di un'alta accessibilità e sempre con la prerogativa di affidabilità e precisione nelle misurazioni.

Inoltre la topografia spesso si accompagna ad altri metodi di rilevamento, siano essi il rilievo diretto, ma anche la fotogrammetria, laser scanner e interviene persino nella realizzazione della cartografia.

Per questo motivo è necessario comprendere i principali riferimenti teorici che costituiscono il fondamento della disciplina e che permettono il controllo delle procedure adottate durante le operazioni di rilevamento.

LA TOPOGRAFIA

La topografia (il cui termine derivante dal greco è composto da topos = luogo e graphos = grafia) è una disciplina che ha per oggetto lo studio dei metodi, dei procedimenti applicativi, dei modelli di calcolo e delle strumentazioni finalizzate al rilievo di una porzione limitata della superficie terrestre, sufficientemente piccola da poterne trascurare la sfericità o curvatura (generalmente l'area definita attorno ad un punto con raggio max di 15 Km).

Come si è visto, all'inizio la topografia misurava prevalentemente angoli, oggi tuttavia le operazioni topografiche hanno come scopo la misura di:

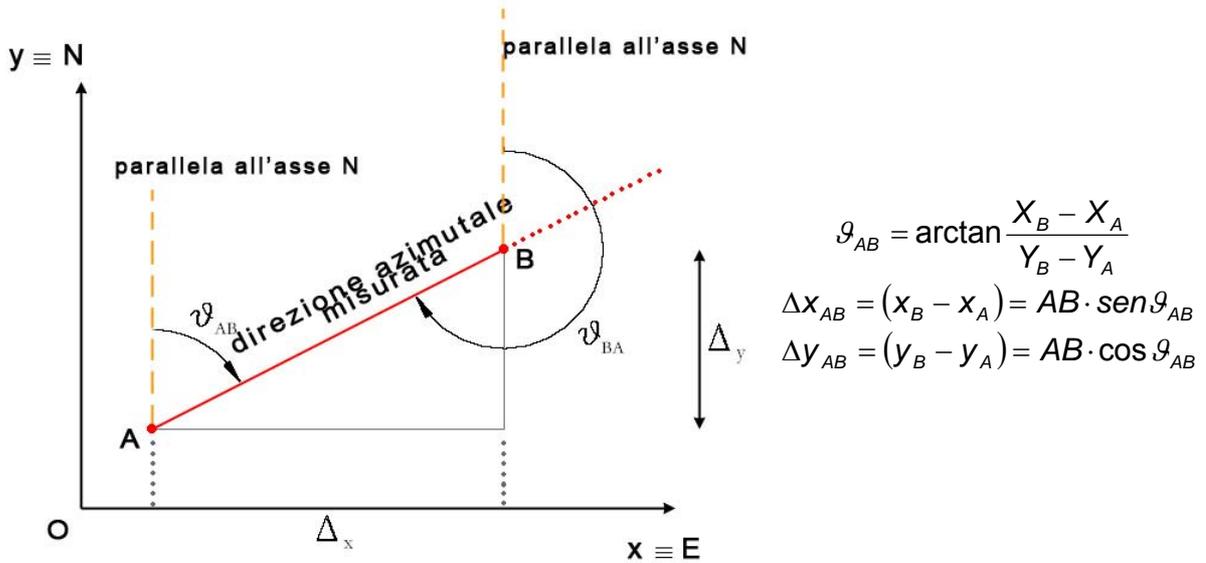
- ***direzioni***
- ***distanze***
- ***dislivelli***

Direzioni

Angolo di direzione

Si consideri un sistema di riferimento cartesiano nel quale siano noti i punti P e Q tramite le loro coordinate.

Definiamo "Angolo di direzione di Q rispetto a P (θ_{PQ} o (PQ))", l'angolo di cui la parallela all'asse Y del riferimento passante per P, deve ruotare in senso orario per sovrapporsi alla direzione PQ.



Ne consegue che tra θ_{AB} e il suo reciproco θ_{BA} sussiste la relazione:

$$\theta_{AB} = \theta_{BA} \pm \pi \quad (+ \text{ se } \theta_{BA} < \pi) \quad (- \text{ se } \theta_{BA} > \pi)$$

L'angolo di direzione è dunque un angolo **calcolato** tra la direzione di riferimento e quella misurata

Angolo azimutale

Dati tre punti (A, O, B), è l'angolo diedro formato dal piano contenente le verticali per O e A col piano contenete le verticali per O e B.

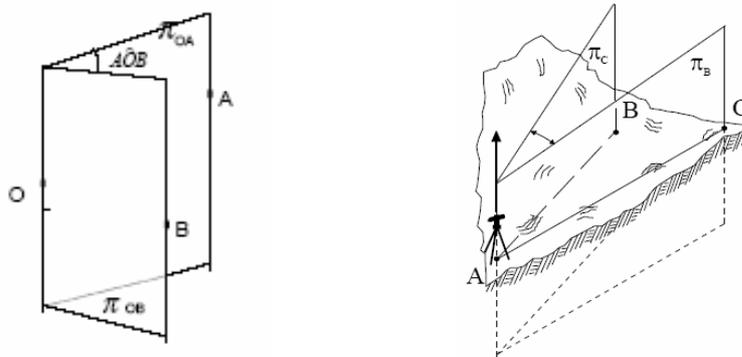
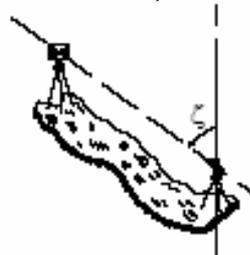
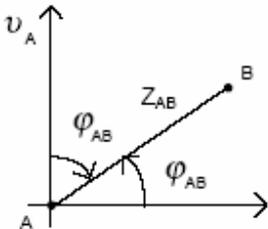


Fig. 1: angoli azimutali

Angolo zenitale

E' l'angolo compreso tra la direzione della verticale e la direzione considerata.

Alternativamente è possibile utilizzare l'*angolo di elevazione* α_{AB} (minima rotazione antioraria tra la l'orizzontale e la direzione che si considera).



Angolo zenitale

Azimut

E' un particolare angolo di direzione in cui l'asse Y coincide con la direzione del Nord.

E' quindi l'angolo di cui deve ruotare la direzione del Nord in senso orario per sovrapporsi alla direzione considerata.

$$\alpha = \arctan \frac{x_k - x_i}{y_k - y_i} - \arctan \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}$$

In topografia si utilizzano diversi sistemi per la misura dell'ampiezza dell'angolo:

Sistema matematico: l'unità di misura angolare è il "radiante" [rad] (unità SI) definito come "angolo sotteso da un arco di lunghezza pari al raggio". Dalla definizione ne consegue che l'angolo α è espresso in radianti come rapporto:

$$\alpha = l / R \quad \text{dove } l = \text{lunghezza dell'arco sotteso} \quad R = \text{raggio circonferenza}$$

Sistema centesimale: l'unità di misura angolare è il "grado centesimale" [gon] (unità non SI ammessa) definito come: $1 \text{ gon} = \pi / 200 \text{ rad}$

Sistema sessagesimale: l'unità di misura angolare è il "grado sessagesimale" [°] (unità non SI ammessa) definito come: $1^\circ = \pi / 180 \text{ rad}$

Sistema sessadecimale: l'unità di misura angolare è il "grado sessagesimale" [°] (unità non SI ammessa). Differisce dal precedente sistema sessagesimale in quanto i sottomultipli del grado sono espressi in forma decimale. E' utilizzato per la condotta dei calcoli al posto di quello sessagesimale.

sistema	Angolo giro	Angolo giro	Angolo retto	Sottomultipli	Notazione
Matematico RAD	2π rad	π rad	$\pi/2$ rad	mrad = 10^{-3} rad μ rad = 10^{-6} rad	5.2660535
Centesimale GON	400 gon	200 gon	100 gon	cgon = 10^{-2} gon mgon = 10^{-3} gon	335.247378
Sessagesimale DMS	360°	180°	90°	$1' = 1^\circ / 60$ (un primo) $1'' = 1' / 60$ (un secondo)	$301^\circ 43' 21''$,505
Sessadecimale DEG	360°	180°	90°	$1' = 1^\circ / 100$ (un primo) $1'' = 1' / 100$ (un secondo)	301.7226402

Le distanze

In Topografia sono oggetto di misura le distanze reali intese come segmenti congiungenti in linea retta i punti in esame

$$\sqrt{(y_a - y_i)^2 + (x_a - x_i)^2 + (z_a - z_i)^2} - d_{ia} = 0$$

Per i rilievi a grande scala (come nelle applicazioni architettoniche) si assume quale superficie di riferimento un piano locale, cioè un piano orizzontale con quota pari a quella media della zona in esame.

La distanza che viene misurata è una distanza inclinata, ossia la congiungente il centro dello strumento con il punto da misurare (o centro del segnale posizionato sul punto stesso).

Tale distanza viene poi ridotta all'orizzontale tramite l'angolo zenitale relativo alla stessa direzione:

$$d_0 = d_i \sin z$$

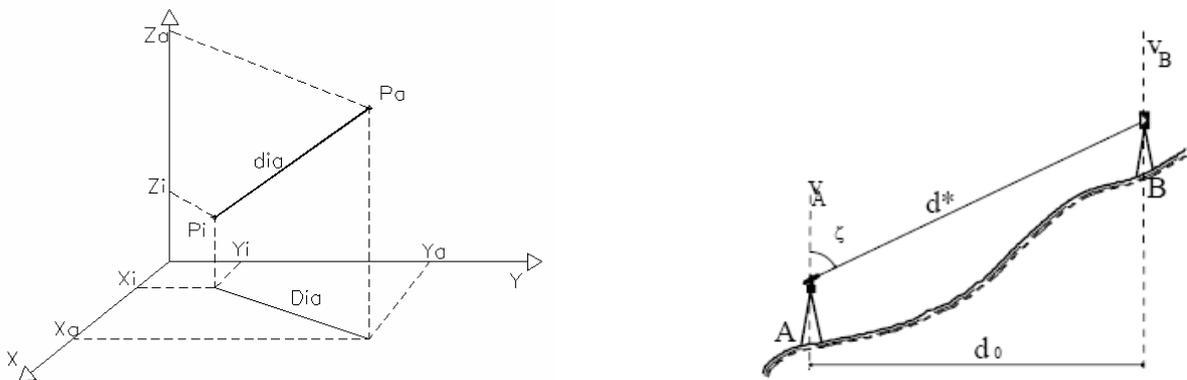


Fig. 2: distanza inclinata d

Dislivelli

Si definisce quota di un punto la sua distanza da una superficie di riferimento misurata sulla verticale per il punto stesso; la superficie di riferimento è il geode, che può essere approssimato alla superficie del mare in quiete, supposta estesa anche al di sotto delle terre emerse.

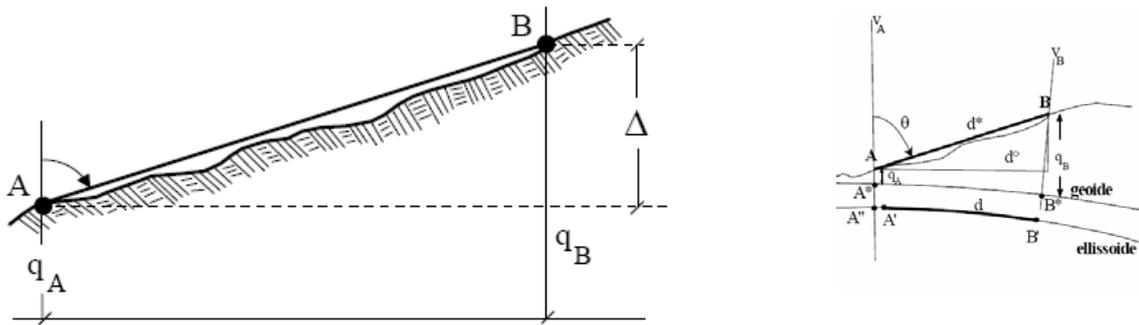


Fig 3: il dislivello Δ è dato da $q_B - q_A$

Considerando il punto A, di quota q_A ed il punto B a quota q_B , il problema sarà quello di stabilire la differenza di quota, o *dislivello*, fra i punti, cioè la differenza $q_A - q_B$. In particolare, le verticali passanti per due punti, distanti fra loro meno di 100 metri, possono essere considerate parallele e la superficie del geode può essere approssimata da un piano ad essa tangente; il dislivello Δ tra due punti A e B può allora essere approssimato dalla differenza di distanza dei due punti dal piano tangente al geode.

STRUMENTI CON CUI SI EFFETTUANO LE MISURE

Tutte le operazioni topografiche hanno come scopo la misura delle classi di grandezze che abbiamo appena esaminato. Gli strumenti adottati per queste operazioni saranno:

- il *teodolite*, per la misura di angoli azimutali e zenitali;
- il *distanziometro elettronico*, per la misura diretta delle distanze.
- il *livello*, per la misura delle differenze di quota.

Le misure angolari e di distanza possono essere effettuate con un unico strumento detto **total station** (stazione totale) che riunisce in sé le funzioni del teodolite e del distanziometro elettronico.

Materializzazione dei punti

Nel definire le grandezze che sono oggetto di misure da parte del topografo, abbiamo fatto riferimento, in modo generico, a *punti* A, B, C del terreno; occorre chiarire come questi punti, là considerati come astrazioni geometriche, siano materializzati nella realtà.

Prendiamo in considerazione, a questo scopo, la misura di un angolo azimutale; la misura verrà eseguita mettendosi con uno strumento, il teodolite, sul punto A e osservando, mediante il cannocchiale topografico, che fa parte del teodolite, gli altri due punti B e C. Il punto A sul quale ci si mette con lo strumento, si chiama **punto di stazione**, mentre i punti B e C sono i **punti collimati**. Il **punto di stazione** può essere costituito da una borchia metallica infissa nella pavimentazione stradale, dall'incrocio di due tratti disegnati sulla testa di un picchetto (in caso di rilievi di breve durata), da una borchia cementata in un piccolo pilastro di cemento armato (sistema più durevole), da un punto non materializzato di proposito ma ben individuabile, come ad esempio l'incrocio di due assi stradali o l'angolo di una tessera di un pavimento.

I **punti collimati** possono essere materializzati in due modi:

- da punti di elementi artificiali o naturali esistenti (punta di un campanile, spigolo di una finestra, spigolo di una modanatura, ecc.);
- da punti del tipo di quelli su cui si fa stazione e che vengono resi visibili da lontano con opportuni segnali (prisma riflettente).



esempi di caposaldo su pozzetto in cemento; punto di stazione e punto collimato con prisma riflettente

Teodolite

Nel corso dei secoli sono stati numerosi gli strumenti dedicati alla misura degli angoli (goniometri, goniografi, rapportatori,...), ma lo strumento oggi più utilizzato in campagna è il teodolite, suddiviso in due tipi: ottico meccanico (tradizionale) ed elettronico.

Un'altra classificazione che viene utilizzata è legata all'incertezza di ogni singolo strumento, per cui si hanno teodoliti con una precisione al decimillesimo di grado centesimale, al millesimo, al centesimo fino ai cinque centesimi.

Un'ultima classificazione è legata all'impiego, per cui si hanno teodoliti da triangolazione (+ precisi), teodoliti da ingegneria e teodoliti da cantiere (- precisi).

In realtà i teodoliti non rilevano esattamente angoli, ma direzioni angolari .

Gli organi fondamentali del teodolite sono:

- due cerchi, quello orizzontale (o azimutale) e quello verticale (zenitale). Essi contengono il campione di misura, generalmente frazioni di grado, e la somma dei campioni, visto che l'intero cerchio va da 0 gon a 400 gon;
- un mezzo collimatore, cannocchiale munito di reticolo, che è collegato rigidamente a una parte ruotante intorno ad un asse che va reso verticale, a sua volta solidale con un indice: questa parte viene detta alidada. Negli strumenti tradizionali l'indice serve a correlare una certa direzione, individuata dall'asse di collimazione del cannocchiale, con un tratto della graduazione del cerchio (sia del cerchio orizzontale che di quello verticale). Il conteggio dei campioni (e delle loro frazioni) compresi fra due direzioni (e quindi corrispondenti ad un angolo) è facilitato dall'incisione dei valori numerici dei gradi, delle decine e dei sottomultipli sui cerchi.

Lo strumento può dunque essere schematizzato come in figura secondo tre assi:

r *asse primario*, reso verticale, intorno al quale ruota l'alidada;

m *asse secondario*, perpendicolare ad r, orizzontale, intorno al quale ruota il cannocchiale. *L'asse primario e l'asse secondario sono di tipo meccanico.*

a.o. *asse terziario, di tipo ottico.* E' l'asse del cannocchiale stesso, è solidale con le rotazioni degli altri due assi e può avere rotazioni indipendenti nel piano verticale.

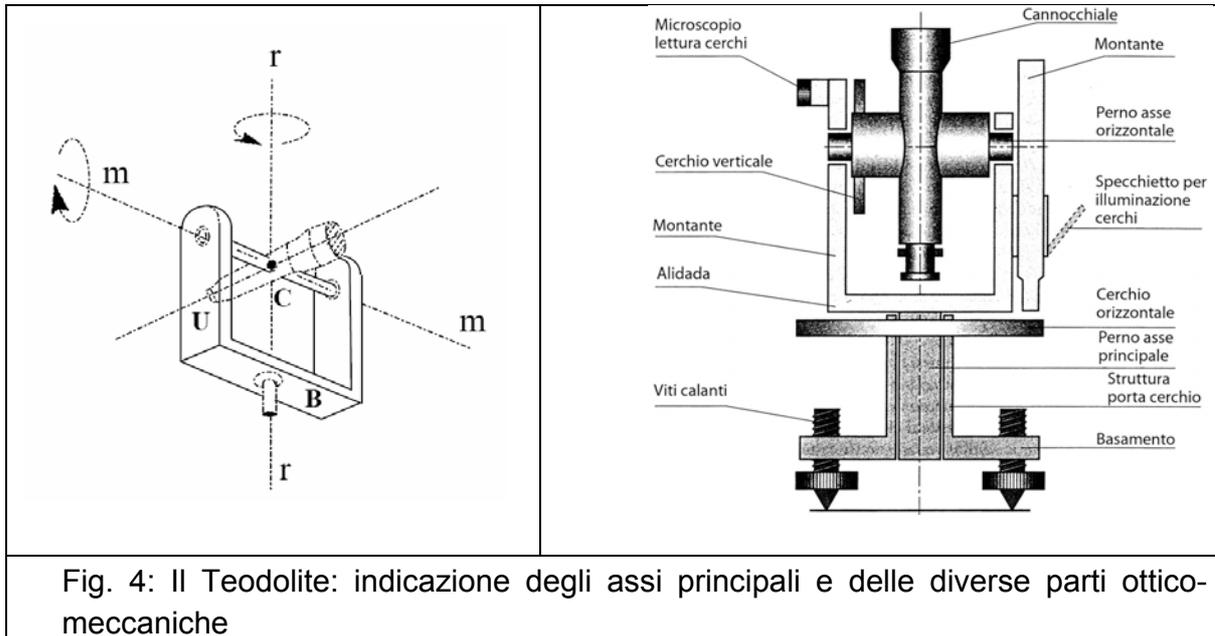


Fig. 4: Il Teodolite: indicazione degli assi principali e delle diverse parti ottico-meccaniche

Lo strumento poggia su di un basamento provvisto di tre viti calanti. La struttura delle viti calanti è tale da far ruotare di piccole quantità l'intero strumento, onde soddisfare la condizione della resta verticale de suo asse principale.

Un altro accessorio importante dei teodoliti è la livella che può essere sferica e torica. La livella torica, la più precisa, è una fiala di vetro con la superficie interna toroidale entro la quale è contenuto per gran parte liquido a bassa viscosità (etere od alcool ad esempio) e basso punto di congelamento. Il pelo libero tra il liquido ed i suoi vapori (bolla) si dispone normalmente alla linea di forza di gravità passante per la livella, la tangente al centro della bolla si dispone dunque sempre orizzontale. È detta sensibilità della livella, l'angolo di cui la si deve ruotare sulla sua linea d'appoggio affinché la bolla si sposti di 1 mm. Tale sensibilità, nei teodoliti di buona precisione, è attorno ai 10". Oggi alcuni teodoliti sono muniti anche di livelle elettroniche.

Un ultimo accessorio è il piombino ottico che permette la collimazione di un riferimento nella direzione nadirale dell'asse primario.

Misura degli angoli azimutali

Calettato sul collare del basamento c'è un cerchio graduato; in fase di lettura un indice montato sull'alidada segnerà un valore del cerchio. Supponendo quindi di aver collimato il punto B, ad asse primario perfettamente verticale, l'indice di lettura, solidale con l'alidada, definirà, sul cerchio graduato, una direzione angolare l_1 ; collimiamo ora il punto C mediante rotazioni dell'alidada intorno all'asse primario e del cannocchiale intorno al secondario: leggeremo sul cerchio la seconda direzione angolare l_2 .

L'angolo azimutale sarà allora:

$$\Delta = I_2 - I_1$$

Questo vale però solo in condizioni di rettifica dello strumento, quando cioè gli assi sono fra loro ortogonali e il centro della graduazione del cerchio coincide con la traccia dell'asse primario sul piano di rotazione dell'alidada.

Misura degli angoli zenitali

Innestato sullo stesso perno che porta il cannocchiale e solidale ad esso, c'è un secondo cerchio graduato il cui centro coincide con la traccia dell'asse secondario; l'indice di lettura è solidale con l'alidada. Se è realizzata la condizione che, a cannocchiale perfettamente verticale l'indice segni zero, in fase di collimazione, quando cioè ruoteremo il cannocchiale per mirare il punto B, potremo leggere sul cerchio l'angolo di cui il cannocchiale è dovuto ruotare per portarsi dalla verticale per A sulla congiungente A-B, che è appunto l'angolo zenitale.

Esaminando ora le condizioni che devono essere verificate perché si possa realizzare con il teodolite lo schema di misura di angoli azimutali e zenitali precedentemente esaminato, si osservano diverse:

a- Condizioni intrinseche dello strumento.

Le condizioni di rettifica intrinseche dello strumento sono le seguenti

1. Si ipotizza che l'asse del perno dell'alidada coincida con il centro del collare (asse primario).
2. L'asse primario, intorno al quale ruota il perno dell'alidada deve essere ortogonale all'asse secondario, intorno al quale ruota il cannocchiale.
3. L'asse di collimazione del cannocchiale (asse terziario) deve a sua volta essere ortogonale all'asse secondario.
4. I tre assi strumentali devono intersecarsi in uno stesso punto che viene definito centro dello strumento.
5. Il centro della graduazione del cerchio orizzontale deve coincidere con la traccia dell'asse primario sul piano che contiene il cerchio stesso, così come il centro della graduazione del cerchio verticale deve coincidere con la traccia dell'asse secondario sul suo piano.
6. Quando il cannocchiale è disposto con l'asse di collimazione coincidente con l'asse primario, si deve leggere zero al cerchio verticale.

b- Condizione in fase di misura.

1. Ponendo lo strumento in stazione su un punto, l'asse primario deve coincidere con la verticale passante per quel punto.

Gli errori che più spesso influenzano le misure azimutali e zenitali sono:

- Errore di eccentricità dell'alidada;
- Errori causati da srettifiche di costruzione;
- Errore di verticalità dell'asse primario;
- Errore residuo di verticalità.

Distanziometro

La misura delle distanze con precisioni paragonabili a quelle che da oltre un secolo sono tipiche delle misure angolari è sempre stato un problema di non facile soluzione. Ciò era dovuto fondamentalmente a dover attraversare il terreno morfologicamente più o meno accidentato con apparati che a causa delle precisioni richieste debbono essere abbastanza complessi.

L'operazione di misura era lunga, laboriosa, suscettibile di errori sistematici.

La misura avveniva spesso per via indiretta con metodi telemetrici o stadimetrici ma la precisione era ancora insoddisfacente.

Fu solo nel secondo dopoguerra che apparve il primo distanziometro con portata sino a 150 km e precisione per queste portate. Questi strumenti erano ancora molto ingombranti, poco precisi e il metodo di misura era relativamente lento, ma il passo in avanti formidabile.

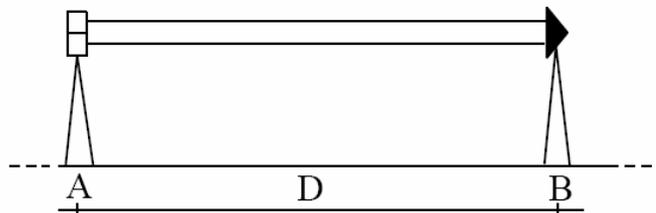


Fig: 6: schema di funzionamento di un distanziometro laser ed esempio fotografico

Per la misura delle distanze è consolidato, da qualche decina d'anni, l'uso di distanziometri elettronici. Le caratteristiche fondamentali di un distanziometro sono la portata, variabile tra 500m e 2-3 km, e la precisione, variabile da $\pm 0,5\text{cm}$ a $\pm 1\text{cm}$.

I principi sottesi alla realizzazione dei vari modelli sono differenti, in funzione delle distanze che possono essere misurate.

I componenti principali del distanziometro possono essere schematizzati con:

- un emettitore (o generatore);
- un ricevitore;
- un discriminatore.

Il generatore emette una radiazione elettromagnetica nel campo dell'infrarosso, modulata in ampiezza, che arriva ad un segnale riflettente posizionato sul punto da misurare e ritorna indietro al ricevitore.

La distanza percorsa dall'onda (dallo strumento al segnale e ritorno, cioè il doppio della distanza che si intende realmente determinare) è pari al numero di lunghezze d'onda percorse dalla radiazione, più una generica frazione di lunghezza d'onda dovuta allo sfasamento tra il segnale emesso e quello di ritorno.

La misura elettromagnetica della distanza con distanziometri (EDM = *Elettromagnetic Distance Meter*) può avvenire attraverso strumenti che impiegano come onde portanti le onde luminose EODM (*Elettro Optical Distance Meter*) o che impiegano onde centimetriche (MDM = *Micro wave Distance Meter*).

Si possono distinguere strumenti che prevedono la misura dello sfasamento tra l'onda emessa e quella ricevuta e quelli che prevedono la misura di tempi trascorsi tra due impulsi o tra due treni d'onda opportunamente codificata.

In entrambi i metodi la misura viene ripetuta in genere qualche migliaio di volte sicché è possibile ricavare lo scarto quadratico medio che, (essendo tutte le misure eseguite entro pochi secondi) non dipende in senso stretto dalle variazioni ambientali ma può considerarsi un errore accidentale.

Misure di fase

Questi distanziometri sono i più diffusi; il concetto di funzionamento è quello di emettere una radiazione ottica sulla lunghezza d'onda dell'infrarosso vicino, ($\lambda=0.78\mu\text{m}$) di modularla e di trasmetterla verso un prisma retro riflettore; quest'ultimo riflette una parte dell'onda verso la parte ricevente dell'EODM che misura la differenza di fase tra l'onda emessa e quella ricevuta.

Questo sfasamento misurabile è funzione del doppio della distanza tra il distanziometro e il prisma.

Nell'EODM sono dunque presenti due parti, una trasmittente ed una ricevente.

L'esigenza di concentrare l'energia per superare grandi distanze ed avere un buon segnale di ritorno, fa sì che si utilizzino onde infrarosse coerenti (laser), l'esigenza di poterne discriminare la fase con precisione, suggerisce di modulare queste onde con frequenze proprie delle onde decametriche o metriche, infine la necessità di far ritornare buona parte del segnale dal punto di misura verso la stazione fa sì che si usino **prismi** riflettori (e non semplici specchi).

Misura di tempo di volo (o a impulsi)

Il concetto di misura è molto semplice: nota la velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica, il tempo Δt tra andata e ritorno del segnale verso il prisma è funzione della distanza:

$$D = \frac{v \Delta t}{2}$$

Un metodo così semplice ha tuttavia un problema: occorre, affinché la distanza D abbia precisione minima, che sia v che Δt siano misurabili con tali precisioni. Per fare

ciò nello strumento è inserito un oscillatore che misura il tempo di andata e di ritorno. La misura della distanza avviene tenendo conto dei tempi di avvio di migliaia di impulsi emessi a 2000 Hz di frequenza (o centinaia in modalità tracciamento), e ciò consente di ricavare e fornire anche il numero di misure fatte e lo sqm delle stesse. Uno solo di questi impulsi permette in teoria di determinare la distanza e ciò consente di seguire agevolmente anche oggetti in movimento.

I vantaggi di questi strumenti sono una maggior portata a parità di potenza (si possono raggiungere 6 km con un prisma), in genere una maggior precisione e la possibilità per piccole distanze di essere usati senza prismi. Sino a 200-250 m è sufficiente di solito l'energia di ritorno della superficie colpita anche se lo s.q.m. in questi casi decresce a 5 ± 10 mm. Sono molte le applicazioni che possono beneficiare dell'assenza del prisma, anche se grande attenzione va posta nella comprensione di quale particolare dell'oggetto collimato si misura nel segnale di ritorno.

Prismi riflettenti

Posizionata la stazione totale sul primo estremo della distanza da misurare, sull'altro estremo deve essere messo un dispositivo riflettente, in grado di rinviare verso il distanziometro la maggior parte possibile dell'energia emessa. A questo scopo si impiegano *prismi retrodirettori*, la cui forma, corrispondente allo spigolo di un cubo, consente di rinviare l'onda incidente nella stessa direzione secondo cui è giunta. La dimensione del prisma influenza positivamente la portata del distanziometro, ma può risultare in alcuni casi poco maneggevole. Si ricorre quindi a prismi con diametro 50mm per il collegamento di vertici topografici; sono generalmente accoppiati a mire che ne facilitano la collimazione anche a grandi distanze e possono essere posizionati su un apposito supporto, collegabile alla basetta (che può essere messa in stazione in modo analogo allo strumento) o avvitati su una palina (e impiegati per esempio per un rilievo speditivo dell'andamento di un terreno).

Per il rilievo architettonico sono invece più comodi i *mini-prismi*, con diametro 2-3cm, facilmente posizionabili sui particolari da misurare.

Quando è necessario materializzare sull'edificio i punti oggetto di misura, per esempio perché compaiano nelle immagini da impiegare per un rilievo fotogrammetrico (per essere usati come punti d'appoggio per gli orientamenti), si può ricorrere a target catarifrangenti adesivi.



Stazione Totale (e teodolite integrato)

Per stazione totale si intende invece un teodolite elettronico che comprenda all'interno della sua struttura un distanziometro. Vi è la possibilità, quindi, di leggere direttamente su un display sia la distanza che le misure angolari. Si chiamano infine strumenti integrati quegli strumenti che sono composti da un teodolite elettronico o tradizionale che è possibile connettere o collegare (di solito a cavallo del cannocchiale) con uno strumento distanziometrico ad onde. Sia le misure angolari che quelle di distanza sono lette digitalmente ma i due strumenti sono distinti e separabili.



fig 7 stazioni totali Leica TCA2003 e Topcon GPT7000i

Livello

Ad essere precisi il livello non è uno strumento di misura, ma solo una sua parte. Rispetto agli altri strumenti di misura manca infatti il campione di misura. Esso è solo l'organo di collegamento tra le mire graduate e di confronto mentre campione e somma dei campioni stanno sul complemento strumentale costituito dalle stadie, sia graduate in centimetri sia codificate.

Lo strumento è strutturalmente formato da :

- una traversa T che ruota attorno all'asse ZZ ed è impernata sulla base provvista di viti calanti per mezzo delle quali si ottiene la verticalità del suddetto asse;
- un cannocchiale solidale con la traversa avente asse di collimazione c ed eventualmente retino distanziometrico, con una livella torica ad esso connessa e al cui centramento fine si provvede tramite la vite di elevazione, sino a renderne orizzontale la tangente centrale.

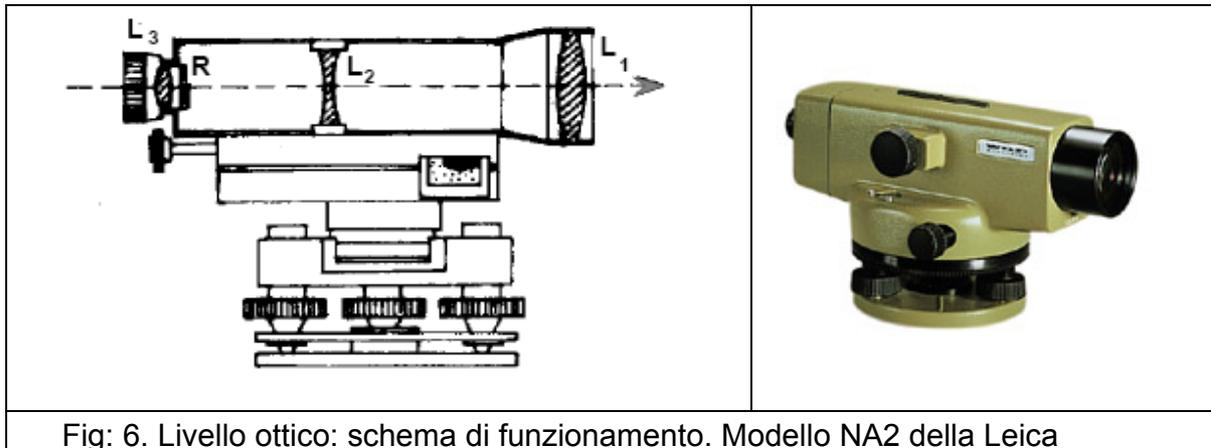


Fig: 6. Livello ottico: schema di funzionamento. Modello NA2 della Leica

Le condizioni da soddisfare per il corretto uso del livello sono:

- l'asse ZZ deve essere reso verticale (anche con incertezza di qualche centesimo di grado)
- l'asse di collimazione va reso parallelo alla tangente centrale della livella, disposta a sua volta orizzontale centrando la bolla con la vite di elevazione.

È immediato chiedersi in cosa differisce questo strumento dal teodolite: sono scomparsi i cerchi e l'alidada, esiste ancora un'asse primario, ma il cannocchiale è incernierato alla traversa e la vite di elevazione permette di alzare od abbassare l'asse di collimazione di soli pochi gon all'orizzontale.

Di gran lunga attualmente più utilizzati che i livelli sono gli autolivelli, sempre derivati da questi primi strumenti descritti, ma nei quali l'orizzontalità dell'asse di collimazione è raggiunta automaticamente con sistemi a pendolismo od a fluido, meccanici od ottici.

La classificazione dei livelli e della livellazione geometrica viene fatta in relazione alla precisione dello strumento: è basata sull'errore quadratico medio di una livellazione in andata e ritorno su un tratto di un chilometro; (sqm chilometrico)

Si hanno:

1. livelli di bassa precisione o da cantiere: >5 mm
2. livelli da ingegneria: 2 mm-5 mm
3. livelli di precisione: 1 mm-2 mm
4. livelli di alta precisione <1 mm

Per raggiungere queste precisioni, in realtà, assieme allo strumento devono utilizzarsi accessori e metodi specifici di rilievo.

Un livello di precisione o di alta precisione, che si contraddistingue per l'alta sensibilità della livella torica, osservata a coincidenza dall'alto numero di ingrandimenti del cannocchiale, si abbina sempre ad una adeguata lamina piano parallela e ad una stadia graduata su un nastro di acciaio invar.

AUTOLIVELLI Gli autolivelli realizzano automaticamente l'orizzontalità dell'asse di collimazione attraverso un meccanismo ottico meccanico chiamato compensatore. Gli schemi costruttivi adottati sono i più disparati e vengono chiamati ottici o meccanici a seconda che il reticolo sia solidale al cannocchiale oppure mobile all'interno dello strumento. È ovvio che il compensatore è dotato di componenti sia ottiche che meccaniche.

LIVELLI ELETTRONICI Anche qui, come nei teodoliti elettronici occorre chiarire che di digitale ed elettronici vi è solo la lettura alla stadia, rimanendo lo strumento, dal punto di vista meccanico e ottico, un buon autolivello. Il principio di lettura della stadia è simile al principio di lettura di una sequenza di codici a barre, perciò le stadiie abbinato allo strumento sono stadiie sulle quali è incisa una particolare sequenza codificata. Per quanto premesso lo strumento può anche essere usato abbinato anche a tradizionali stadiie graduate.

METODI E SCHEMI DI MISURA

Il principio fondamentale che sovrintende il rilevamento del territorio e dell'architettura e la conseguente rappresentazione consiste nella definizione della posizione di una serie discreta di punti, determinata con un'elevata precisione, a cui appoggiare le misure che serviranno per definire la geometria degli oggetti del rilievo (gli elementi caratterizzanti la superficie architettonica o del terreno).

Tale procedura, che ordina poi per analogia qualsiasi tipo di rilievo, sia esso a carattere urbanistico, architettonico, archeologico, ecc., risale al XVII sec., quando *Snellius*, famoso matematico e geodeta olandese, pensò a ricoprire il territorio da rilevare con una rete di punti, organizzati rigidamente secondo triangoli che misurò con un metodo che egli stesso mise a punto, la **triangolazione**, utilizzata in topografia fino nel nostro secolo.

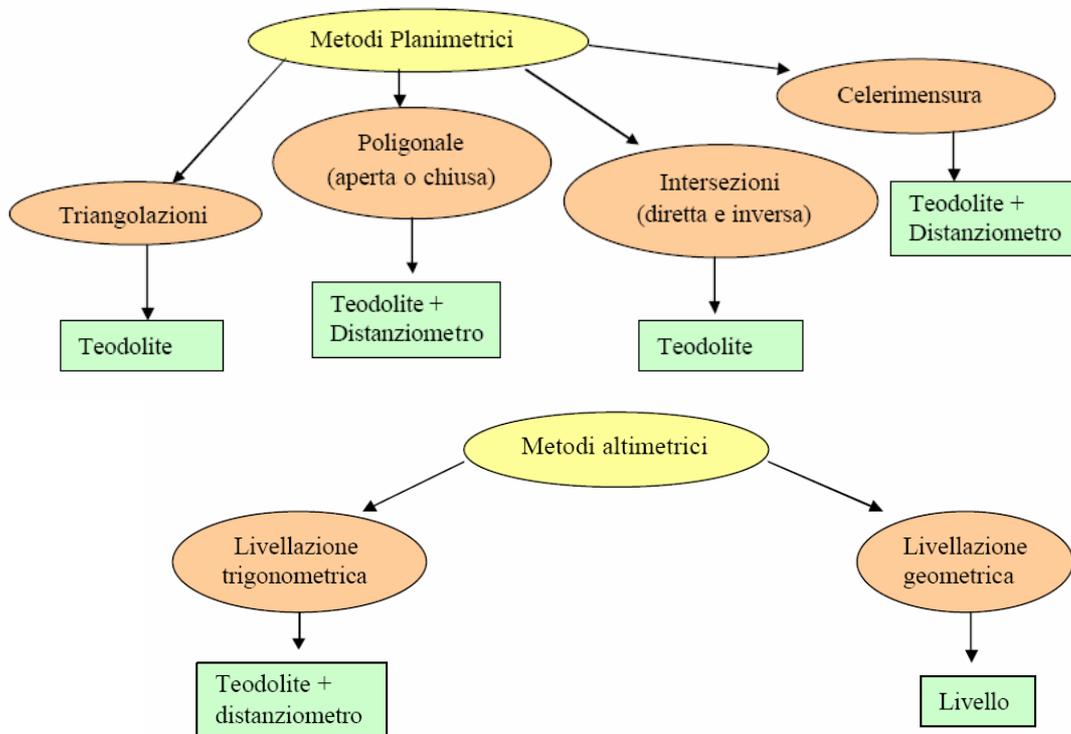
Nel corso della storia della topografia sono stati affinati e utilizzati altri metodi operativi, caratterizzati in generale dalla netta preponderanza delle misure angolari; tutto ciò finché non si risolse il problema della misura delle grandi distanze con il recentissimo avvento degli strumenti ad onde e.m. e con gli ancor più recenti metodi di misurazione satellitare.

In topografia la concezione classica (si ricorda che il metodo topografico nasce per la conoscenza territoriale) prevede inoltre una netta distinzione tra rilevamento planimetrico ed altimetrico, da cui deriva una separazione sia nelle operazioni relative al prelievo dei dati, sia nella elaborazione degli stessi.

Il rilevamento planimetrico consiste nella determinazione delle coordinate planimetriche dei

punti rilevati relazionate ad un piano di riferimento dove le coordinate piane possono essere coordinate cartesiane (riferite cioè ad un sistema di assi cartesiani, di cui uno coincidente con il nord e l'altro con l'est), coordinate polari (riferite ad un punto noto O, ogni punto viene così ad essere individuato tramite la distanza dal punto O e l'angolo di direzione, quest'ultimo calcolato rispetto ad un asse polare prefissato arbitrariamente, generalmente coincidente con il nord) e coordinate geografiche (espresse attraverso latitudine e longitudine)

Il rilievo altimetrico consiste nella determinazione delle distanze dei punti rilevati dal piano orizzontale di riferimento prescelto, cioè nella individuazione delle quote.



Tab.4: il rilievo planimetrico e altimetrico

Con l'avvento degli strumenti topografici di nuova generazione così come il GPS, ma soprattutto in ambito architettonico dove il sistema di riferimento locale è unico e tridimensionale, si è superata questa impostazione, in quanto rilevano sia punti planimetrici che altimetrici e li restituiscono in un unico sistema di riferimento.

Metodi per il rilievo planimetrico

Funzione della rete di inquadramento

Il rilievo topografico ha un ruolo essenziale nella campagna di rilevamento. Attraverso di esso si definisce infatti il sistema di riferimento locale nel quale vengono riportati tutti i risultati operazioni di misura.

Se un solo punto fosse preso come origine delle misure per la costruzione della planimetria di una carta e tutto il rilievo si sviluppasse a partire da esso, si avrebbero due gravi inconvenienti:

- una sensibile perdita di precisione per un continuo accumularsi di piccoli errori;
- la precisione di determinazione dei diversi particolari non sarebbe omogenea per tutti del rilievo.

Spieghiamo meglio il concetto: le operazioni topografiche di rilievo possono essere sommariamente descritte come la determinazione plano-altimetrica dei punti rispetto ad altri punti presi come riferimento; in queste operazioni di determinazione della posizione di punti rispetto ad altri, che consistono in operazioni di misura, si commettono degli errori; non consideriamo ovviamente gli errori grossolani (cioè gli *sbagli*), ma gli errori accidentali dovuti all'influenza dell'ambiente sulle operazioni di misura e alle limitazioni di precisione intrinseche dei metodi di misura usati.

Se si partisse da un punto e da questo si procedesse per eseguire tutto il rilievo, ad ogni determinazione di un nuovo punto, sulla posizione di esso graverebbero tutti gli errori precedentemente commessi. Per contenere questo progressivo accumularsi di errori si dovrebbero impiegare metodi di misura molto onerosi, senza tuttavia evitare il progressivo decadimento della precisione.

Pertanto i punti di inquadramento di un rilievo, oltre a costituire una rete di *punti di vincolo* che garantiscono una precisione uniforme al rilievo, evitano di dover operare, anche nella fase del rilievo di dettaglio, con metodi di misura onerosi .

Per la funzione che devono assolvere e per il fatto di essere alquanto distanti tra di loro, le misure che riguardano la determinazione della posizione dei punti di inquadramento vengono eseguite con strumenti più precisi di quelli che vengono usati per determinare la posizione di tutti i punti che costituiscono la rappresentazione finale.

Nella costruzione della rete di inquadramento la funzione dei vertici (caposaldi di rete) è fondamentale, poiché essi assolvono a una duplice funzione: inserire correttamente il rilievo in un sistema di riferimento definito (locale o cartografico e quindi nazionale), consentire di costruire la rete senza dover effettuare misure di distanza. Questa seconda funzione è oggi meno rilevante, ma quando non esistevano i distanziometri elettronici era di enorme aiuto per i topografi.

La struttura topologica e organizzativa del lavoro di rilievo topografico è fortemente gerarchica. Si procede con la realizzazione di **reti** di livelli successivi che dipendono nella loro definizione dai livelli superiori.

A livello più alto si definisce la **rete principale d'inquadramento** che costituisce la struttura entro la quale vengono realizzate altre sottoreti che permettono il rilievo di dettaglio topografico, il rilievo fotogrammetrico e quello diretto.

La rete principale costituisce dunque l'ossatura di tutto il rilievo in quanto essa definisce il sistema di riferimento locale e ad essa si collegano tutte le altre reti secondarie e di dettaglio.

La rete principale di inquadramento è perciò solitamente realizzata come struttura autonoma, intrinsecamente determinata con misure sovrabbondanti, tali da permettere controlli statisticamente validi.

Nella pratica comune si considera sempre la rete di livello superiore come infinitamente precisa, cioè si considerano le coordinate dei punti come fissi nella compensazione. Questo modo di procedere, anche se non è rigoroso in quanto ogni punto determinato attraverso operazioni di misura ha una propria incertezza, risulta valido dal punto di vista operativo poiché permette una funzionale suddivisione del lavoro. Utilizzando opportuni algoritmi detti "di stima e predizione" (compensazione ai minimi quadrati) è comunque possibile tenere conto delle incertezze delle coordinate dei punti della rete di livello superiore e stimare in modo più efficiente i parametri statistici relativi alle reti secondarie.

Le reti secondarie e quelle di dettaglio possono essere anche calcolate e compensate autonomamente, in un loro sistema di riferimento, e quindi inserite nel sistema locale generale del rilievo con trasformazioni opportune.

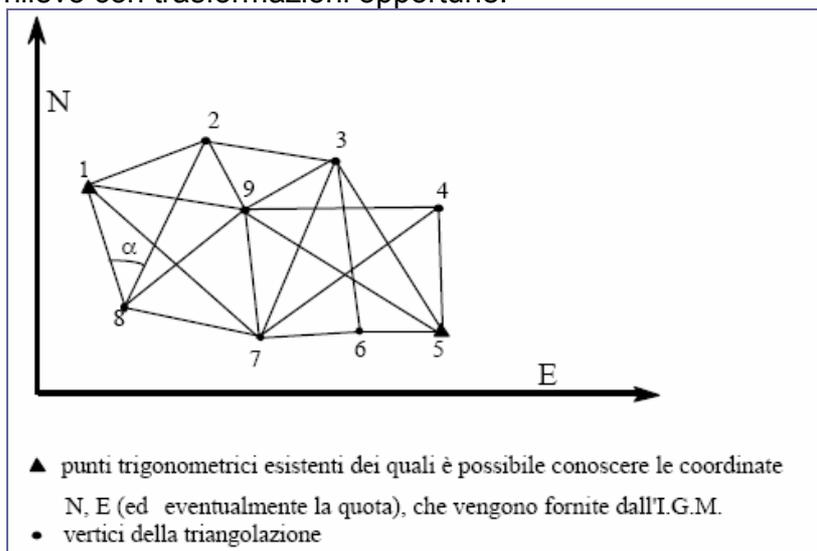


fig. 5 Esempio di rete di inquadramento con vertici trigonometrici

Per approfondimenti si veda: C. Monti, F. Guerra, C. Balletti, G. Galeazzo, Capitolato speciale d'appalto per l'esecuzione di un rilievo in forma numerica alla scala 1:50, IUAV-CIRCE, Quaderni IUAV 12.2000, Venezia, 2000

<http://circe.iuav.it/labfot/capitolato/premessa.htm>

Triangolazione

La costruzione della rete di inquadramento avviene mediante l'operazione topografica che prende il nome di *triangolazione*.

Si tratta di un metodo per determinare la posizione reciproca di punti collegandoli tramite triangoli. Di ogni triangolo, per risolverlo e stabilire la posizione dei vertici, bisogna conoscere almeno tre elementi di cui uno almeno deve essere costituito da un lato; gli angoli interni del triangolo ne stabiliscono la forma ed almeno un lato ne fissa la dimensione. Nella pratica topografica in realtà vengono però determinati più elementi possibile, per ottenere la consueta esuberanza di misure; nella rete geodetica nazionale del I ordine sono state eseguite molte misure angolari e la misura di sole otto basi, sufficienti a dimensionare l'intera rete grazie al rigido collegamento di tutti i triangoli.

Un esempio teorico, può aiutare a chiarire come nella triangolazione si ottiene l'esuberanza di misure angolari per un migliore controllo della rigidità del sistema.

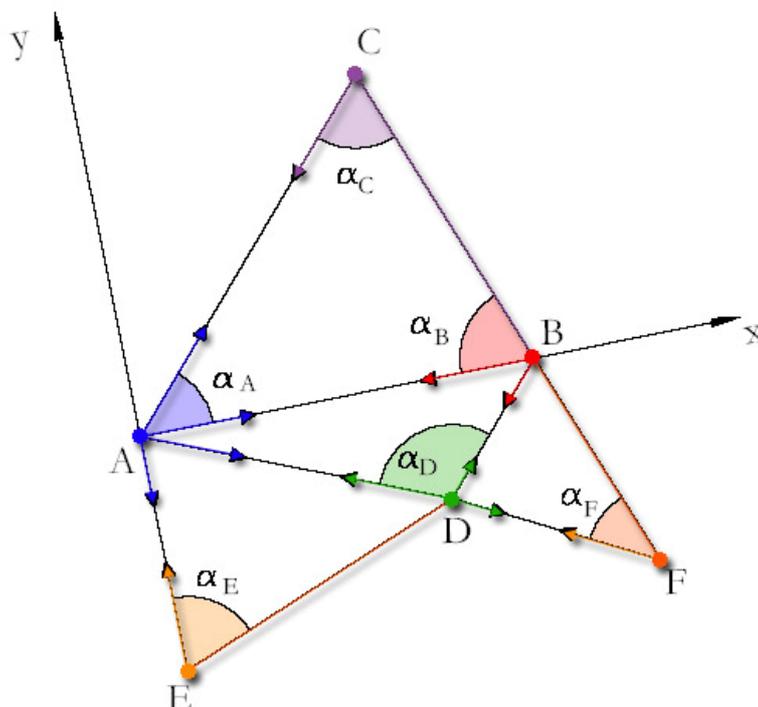


fig. 6 Schema di trilaterazione

Si ipotizzi di aver misurato il lato AB (base misurata) e gli angoli azimutali α_A e α_B (ovviamente questi ultimi sono ottenuti per differenza delle direzioni azimutali misurate).

In tal caso il triangolo ABC è definito in modo univoco e si possono pertanto determinare, attraverso il calcolo, l'angolo α_C e i lati AC e BC.

Una volta stabilito il sistema di riferimento, si possono calcolare le coordinate planimetriche dei tre vertici (calcolo dell'opportuno angolo di direzione per determinare le coordinate di C) In realtà, però, bisogna sempre avere misure esuberanti, e ciò è una delle condizioni della triangolazione moderna e, più in generale, di quasi tutte le operazioni topografiche.

Facendo riferimento alla figura precedente, si dovranno pertanto eseguire le misure azimutali reiterate su almeno 6 vertici (per es. $\alpha_A - \alpha_B - \alpha_C - \alpha_D - \alpha_E - \alpha_F$) e misure di lunghezza su almeno 6 lati o, meglio ancora, su tutti vista la semplicità e la rapidità dell'operazione di misura della distanza con i moderni distanziometri ad onde elettromagnetiche.

Nello stesso esempio si è ipotizzata la scelta di un sistema di riferimento locale, facendo coincidere uno degli assi, (x), con un lato misurato; tale indicazione fa supporre che i lati abbiano lunghezza pari a poche centinaia di metri.

Chiaramente, contemporaneamente alle letture delle direzioni azimutali, si eseguiranno le letture degli angoli zenitali consentendo, contestualmente al calcolo delle coordinate planimetriche dei vertici, anche il calcolo dei dislivelli.

La triangolazione è il metodo con cui l'IGM ha realizzato la rete geodetica nazionale del I ordine su cui si basa la cartografia ufficiale italiana. In tale rete sono stati misurati tutti gli angoli e otto basi distribuite su tutto il territorio nazionale. E' stata una impresa veramente complicata a quei tempi, sia per quanto riguarda la misura degli angoli che per ciò che concerne la misura delle basi.

I lati misurano mediamente 30 – 40 km e quindi anche eseguire le collimazioni angolari non è stato un problema da poco. Gli angoli sono stati misurati con estremo rigore, con un numero molto elevato di ripetizioni per ciascun angolo.

L'elaborazione della rete geodetica nazionale ha fornito le coordinate nel sistema di riferimento internazionale di tutti i vertici. Tali vertici hanno costituito la base per le successive operazioni di raffittimento eseguite con densità differente in funzione della tipologia di territorio servito. La rete geodetica nazionale del I ordine è stata sostituita di recente (2002) dalla nuova rete nazionale IGM95 determinata con strumentazione GPS.



Fig.7: Schema della triangolazione della rete geodetica italiana del I ordine

Intersezione in avanti (diretta)

Le operazioni mediante le quali si infittisce la rete dei punti noti della triangolazione di base sono l'intersezione in avanti e l'intersezione inversa. Il metodo si applica quando, note le coordinate di due vertici, si vogliono determinare le coordinate di un punto inaccessibile.

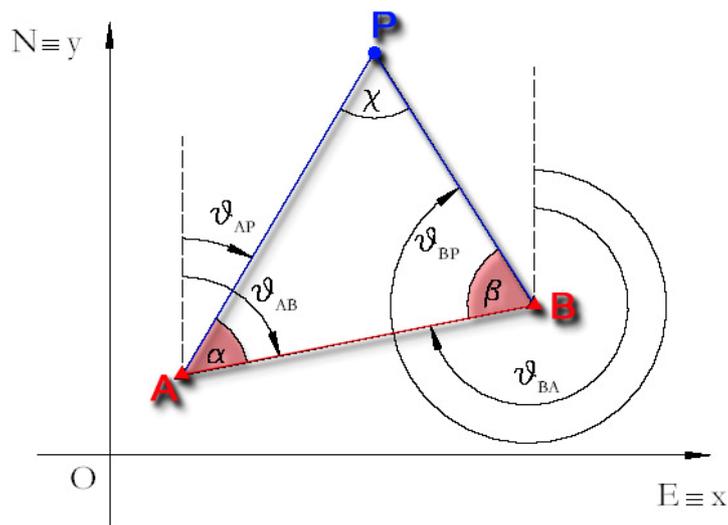


fig.8 Intersezione semplice

Il metodo prevede di stazionare con il teodolite sui due punti A e B di coordinate note e di misurare gli angoli α e β (per il rilievo planimetrico). Si genera così un triangolo di cui sono noti due angoli e il valore della base AB (valore desumibile dalle coordinate dei due estremi). Il triangolo è risolubile con le nozioni di geometria e quindi è possibile determinare le coordinate del vertice incognito P.

Facendo riferimento alla *figura 9a* spieghiamo che cos'è l'intersezione in avanti semplice. Da due punti A e B di coordinate note si eseguono le letture al cerchio orizzontale del teodolite, in particolare:

- dal punto A si effettuano le letture L_{AP} e L_{AB}
- dal punto B si effettuano le letture L_{BA} e L_{BP}

da cui si ricava: $\alpha = L_{AB} - L_{AP}$ $\beta = L_{BA} - L_{BP}$.

La distanza d tra i punti è nota: $d = \sqrt{(E_B - E_A)^2 + (N_B - N_A)^2}$

Quindi è possibile ricavare b:

$$b = \frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}\gamma} d \text{ essendo } \gamma = \pi - \alpha - \beta.$$

Nota b si avrà:

$$N_P = N_A + b \cos \theta_P \text{ essendo } \theta_P = \theta_{AB} - \alpha$$

$$E_P = E_A + b \text{sen} \theta_P \text{ e } \theta_{AB} = \text{arctg} \frac{E_B - E_A}{N_B - N_A}$$

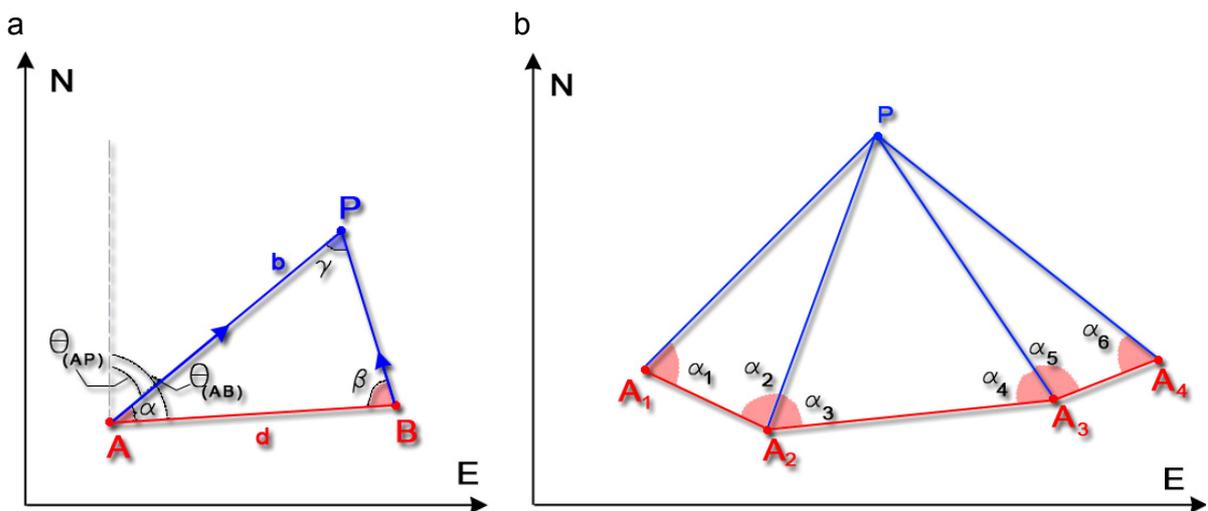


Fig. 9: Schema di intersezione in avanti semplice (a) e di intersezione multipla = ridondante (b)

Si misurano due angoli, cioè due grandezze, per determinare due incognite. Si intuisce empiricamente una delle regole fondamentali dei metodi topografici: ad ogni valore misurato è possibile associare una equazione e quindi per definire un certo numero di incognite è necessario eseguire un numero minimo di misure (ad ogni misura è possibile associare una equazione; un sistema di n equazioni, generate da n misure, permette di definire n incognite).

In questo modo, nell'intersezione in avanti semplice, non abbiamo la possibilità di individuare possibili errori nella lettura al cerchio e quindi errori in α o β . Se si eseguono invece più misure rispetto al minimo necessario, cioè se si rende ridondante il sistema, la soluzione rigorosa del problema permette di determinare non solo le coordinate dei punti ma anche il relativo scarto quadratico medio, indice dell'accuratezza del risultato.

Per rendere il metodo ridondante è necessario eseguire almeno un'altra misura angolare ad esempio da un nuovo punto di stazione di coordinate note (fig.9b). In tal modo le tre misure generano tre equazioni finalizzate a determinare sempre le due incognite del problema; il sistema risolvibile avrà ridondanza 1 e al risultato sarà associabile l'accuratezza per ciascuna delle coordinate incognite.

Questo schema di rilievo viene correntemente nominato **intersezione multipla in avanti**.

Il metodo ha inoltre una notevole importanza anche per rilevare singoli punti su oggetti non accessibili; in particolare è impiegato per determinare i "punti di appoggio" utilizzati nei metodi fotogrammetrici terrestri. Si tratta di particolari naturali o artificiali appositamente scelti su prospetti da rilevare in modo da poter correttamente orientare i fotogrammi impiegati per la restituzione; per approfondimenti di questo argomento è opportuno rifarsi ai testi di fotogrammetria.

Intersezione indietro (inversa)

Anche nell'intersezione inversa lo strumento impiegato è il teodolite.

La sostanziale differenza rispetto al metodo precedente è che si staziona nel vertice di coordinate incognite e si osservano vertici di coordinate note. Per determinare le due incognite del problema si devono misurare i due angoli β_1 e β_2 che risultano sottesi in P alle direzioni ai punti A_1 , A_2 e A_3 ; occorrono quindi almeno tre punti di coordinate note. Se si vuole rendere ridondante il metodo si deve poter collimare un ulteriore punto A_4 di coordinate note, in modo da rilevare l'angolo e ottenere anche le incertezze di P.

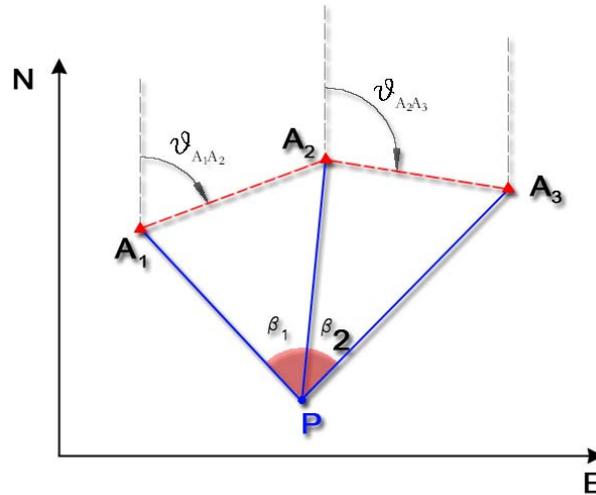


Fig. 10: Schema di intersezione indietro

Poligonali

Col termine di *poligonale semplice* intendiamo quella operazione topografica mediante la quale si determinano le coordinate dei punti intermedi di una spezzata formata da n lati e il cui primo e ultimo punto coincidono con due punti della rete di infittimento.

Lo schema operativo della poligonale semplice consiste nel determinare le coordinate dei suoi vertici intermedi mediante la misura delle loro distanze reciproche e degli angoli formati dai segmenti che li congiungono.

Per fare una poligonale tra due punti di rete di inquadramento occorre pertanto, in primo luogo, scegliere sul terreno e materializzare i punti P_i che ne costituiscono i vertici.

Lo schema più generale di poligonale è quello denominato **poligonale aperta vincolata agli estremi** dove gli estremi P_1 e P_n sono vertici noti, come sono anche noti i punti A e B (determinati mediante intersezione o triangolazione, oppure, in modo più moderno, determinati con strumentazione GPS) ai quali si appoggia. Uno degli aspetti fondamentali è che per determinare qualsiasi tipo di poligonale (di precisione, ordinaria ecc.) vengono sempre misurati tutti i lati l_i e tutti gli angoli α_i e quindi da ogni vertice di poligonale si deve sempre osservare il punto precedente ed il successivo.

Anche in questo caso la ridondanza del metodo serve per stimare l'accuratezza delle coordinate dei punti da determinare.

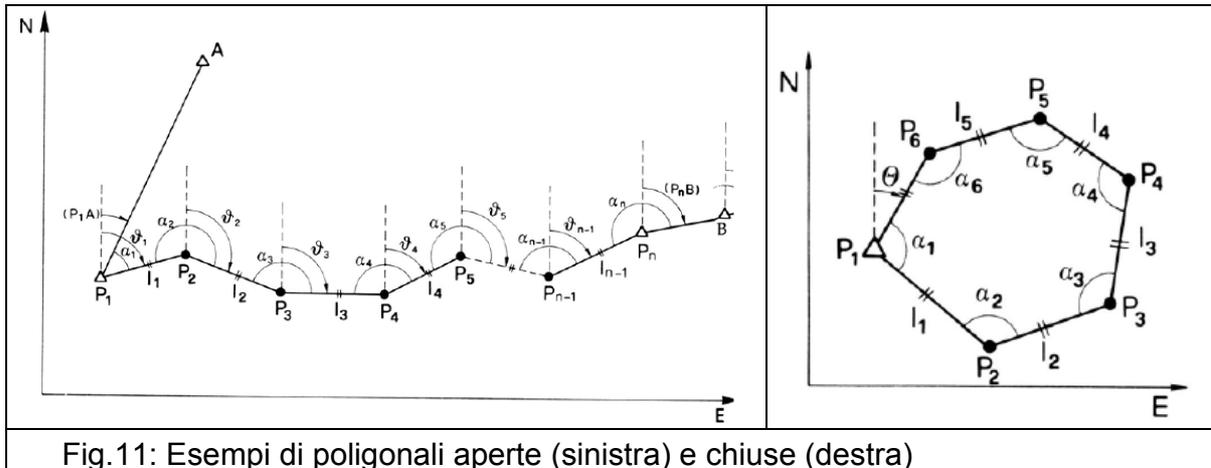


Fig.11: Esempi di poligonali aperte (sinistra) e chiuse (destra)

Un altro caso importante di poligonale è rappresentato da uno schema geometrico che consiste in un poligono chiuso, di un generico numero n di lati; in esso si può considerare che l'ultimo lato coincida con il primo. Tale poligono è denominato **poligonale chiusa**.

E' necessario, infine, affrontare un'ultima considerazione riguardante il sistema di riferimento in cui viene calcolata e compensata la poligonale.

Le poligonali possono essere *orientate*, se riferite ad un sistema di riferimento preesistente e generalmente di ordine gerarchico superiore, oppure *non orientate*, se possono rappresentare un sistema locale indipendente per cui non sia prestabilito il sistema di riferimento in cui calcolarle ma lo si possa scegliere in modo comodo per la loro determinazione.

E' un metodo che ben si adatta al rilievo dei centri urbani, proprio perché si adatta al tessuto urbano; l'unico vincolo è quello di poter collimare il punto precedente e quello successivo. Con la poligonale sono normalmente determinati tutti quei vertici che troviamo su marciapiedi e strade in ogni angolo delle nostre città, evidenziati in genere da cerchi verniciati.

La poligonale si presta bene ad essere utilizzata anche all'interno degli edifici. E' quindi un ottimo metodo per trasportare il sistema di riferimento all'interno dei locali, in modo da organizzare le operazioni di celerimensura.

L'aspetto analitico del problema è relativamente semplice per la singola poligonale ed è riportato sui testi di topografia. E' interessante ricordare che le precisioni intrinseche al metodo sono dell'ordine del centimetro e, con opportuni accorgimenti operativi, anche inferiori. La portata è molto variabile; normalmente si opera con lati mai superiori a qualche centinaio di metri al massimo, proprio perché nei centri urbani oltre tali limiti risulta difficile ottenere la visuale fra due punti a seguito degli ostacoli naturali ed artificiali. Quando si lavora in rilievo di edifici i lati di poligonale sono dell'ordine di alcune decine di metri e anche inferiori, proprio perché il metodo permette di adattarsi alle geometrie disponibili all'interno degli ambiti da rilevare.

Nel caso di particolari applicazioni è anche possibile utilizzare la poligonale come vera e propria origine del sistema di riferimento, scegliendo di far corrispondere il primo vertice come origine degli assi ed il secondo vertice come direzione dell'asse X. In tal modo ci si sgancia dai sistemi di riferimento ufficiali (nazionali) ma si può comunque utilizzare la medesima procedura per eseguire un rilievo di monumenti o di piccoli centri urbani.

Irraggiamento (o celerimensura)

Costituisce l'ultima fase del procedimento di rilievo, in quanto, con essa, si individuano i punti di dettaglio e richiede l'impiego di teodolite e distanziometro.

Tutti i metodi precedenti (ad eccezione dell'intersezione in avanti) di fatto servono esclusivamente o poter determinare vertici di rete o di poligonale nei vari ambiti da rilevare; dove i punti determinati devono essere stazionabili con teodolite e quindi non possono corrispondere a elementi architettonici, come spigoli o dettagli di manufatti.

Con la celerimensura invece si arriva a determinare le coordinate plano-altimetriche dei vertici con cui si vuole discretizzare l'oggetto del rilevamento (sono qui da ricordare le considerazioni fatte in precedenza a proposito della discretizzazione dei vari oggetti in punti "significativi").

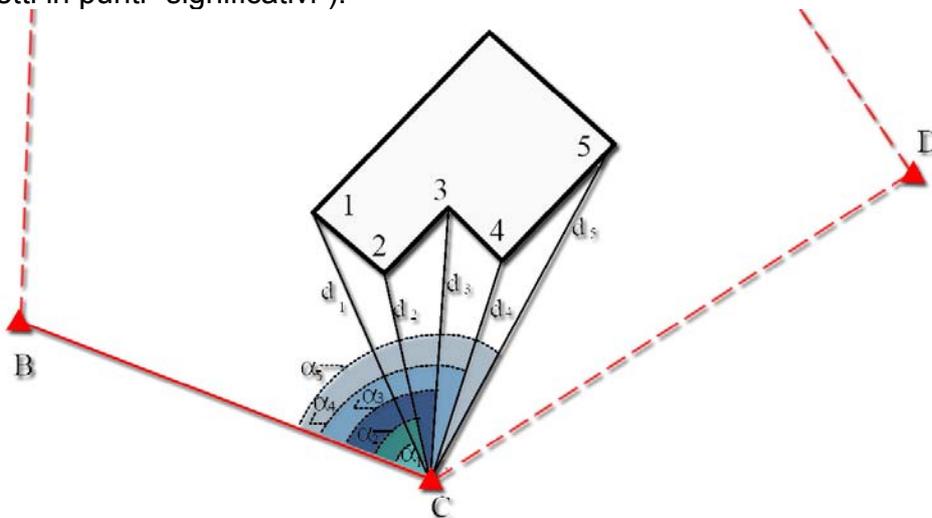


Fig.12: Schema di rilievo per irraggiamento (celerimensura)

Ovviamente si lavora in un sistema di riferimento che è già stabilito dalla conoscenza delle coordinate di due vertici utilizzati uno per la stazione del teodolite e l'altro per orientamento.

Semplicemente andando a collimare la sequenza dei vertici da determinare è possibile definire le coordinate di tali vertici mediante la misura di azimuth, zenit e distanza. Anche in questo caso è da notare che ogni punto ha tre incognite (due planimetriche ed una altimetrica); la misura di 3 valori (due angoli e una distanza) permette di determinare le incognite del problema. Il metodo non è ridondante.

Anche in questo caso va ricordato che, assieme alla poligonale, è il metodo con cui si richiede siano eseguiti i rilevamenti catastali per inserire in mappa nuovi edifici o per rilevare le geometrie di frazionamenti e di accorpamenti di proprietà.

E' importante comprendere come normalmente la rete di dettaglio o la poligonale è progettata proprio tenendo conto che deve essere da supporto per la celerimensura con cui è possibile determinare i vertici che discretizzano gli oggetti da rilevare.

L'impiego dei moderni distanziometri senza prisma ha ulteriormente diffuso tale metodo, che di fatto è alla base anche dei sistemi di laserscanning terrestre.

Metodi per il rilievo altimetrico

Livellazione Geometrica

La livellazione geometrica è un'operazione che consente di misurare la differenza di quota, o dislivello, fra i punti della superficie fisica della terra.

La livellazione geometrica può essere *ordinaria* o *di precisione*.

I casi tipici in cui si utilizza la *livellazione ordinaria* sono:

- a) determinazione delle quote dei punti di inquadramento altimetrico di rilievi a grande scala effettuati sia con metodo topografico sia fotogrammetrico;
- b) integrazione altimetrica di rilievi fotogrammetrici a grande e media scala di carattere speciale;
- c) rilevamento di tracciati di opere di ingegneria (strade, ferrovie, canalizzazioni, ecc.).

Si adotta invece generalmente la *livellazione di precisione*:

- a) per la determinazione delle quote dei caposaldi di livellazione della rete generale di inquadramento altimetrico;
- b) per valutare assestamenti del suolo che coinvolgono aree molto estese (decine o centinaia di km);
- c) per il controllo di grandi strutture;
- d) per il controllo dell'orizzontalità dei grossi impianti industriali.

Principio del metodo.

Per determinare il dislivello fra due punti A e B mediante livellazione geometrica, si ricorre al livello che deve soddisfare essenzialmente la sola condizione di poter disporre orizzontale l'asse di collimazione del cannocchiale in qualsiasi direzione si effettui il puntamento.

L'operazione di misura del dislivello ($Q_B - Q_A$) eseguita con un *livello* e 2 stadiie poste verticali nei due punti A e B è chiamata **battuta di livellazione geometrica**.

La distanza AB non deve mai superare 100÷120 m (a tale distanza le verticali passanti per i due punti possono essere considerate parallele e la superficie di riferimento delle quote è perciò assimilabile ad un piano orizzontale perpendicolare

alle verticali stesse) ed il semplice principio geometrico che fornisce il dislivello è illustrato dalle seguenti relazioni:

$$Q_A + l_A = Q_B + l_B$$

$$Q_B - Q_A = l_A - l_B = l_{ind.} - l_{av.}$$

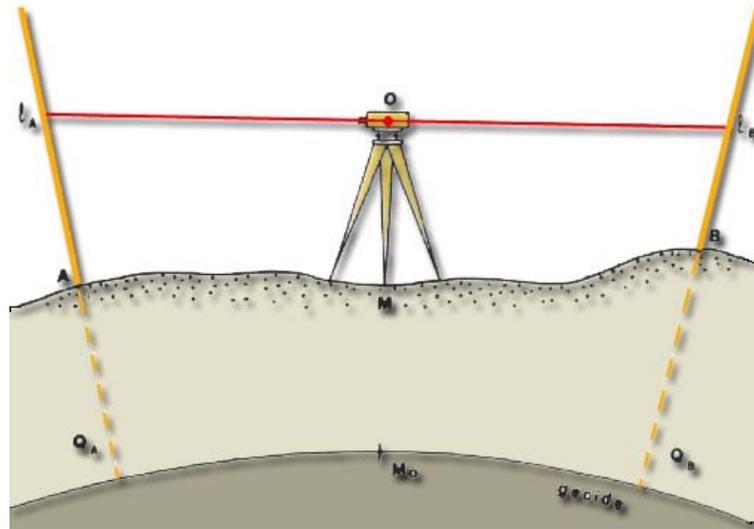


Fig.13: Livellazione geometrica dal mezzo

Il dislivello fra i punti A e B sarà la differenza fra le distanze dei punti A e B della superficie di riferimento s .

Per misurare il dislivello si procede nel seguente modo:

1- Si dispone una stadia graduata su ciascuno dei punti A e B.

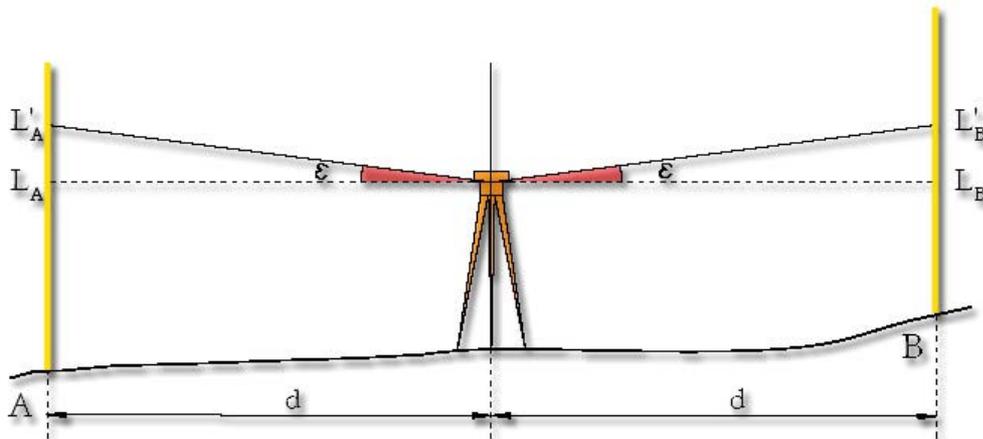
Le più comuni stadie verticali sono stecche di legno lunghe 3 m e larghe circa 10 cm. Recano generalmente una graduazione in cm la cui origine è il punto di appoggio sul terreno. Collimando la stadia e facendo la lettura ad un tratto orizzontale del reticolo si leggono i dm, si contano i cm e si stimano i millimetri.

Le stadie vengono disposte secondo la verticale con l'ausilio di una livella sferica montata su ciascuna di esse dalla parte opposta rispetto alla graduazione.



Fig.14: dettaglio di una stadia graduata e schema delle osservazioni da un punto equidistante

- 2 - si rendono verticali le stadie centrando le livelle sferiche montate su di esse;
 3 -si fa stazione con il livello su un punto O equidistante da A e B, ma non necessariamente allineato con essi; in questo modo (**battuta dal mezzo**) si ha lo stesso possibile errore dovuto alla mancata rettifica strumentale corrispondente alla deviazione dall'orizzontale dell'asse di collimazione. In questo modo l'errore di lettura che si commette sulle due stadie, paria a $d \cdot \tan \varepsilon$, è uguale in valore e segno in A e B, per cui la differenza delle letture $L'_A - L'_B$ è uguale alla differenza $L_A - L_B$ delle letture che si sarebbero fatte in assenza di sistematismo.



- 4.- si collima dapprima la stadia posta in A, avendo resa orizzontale la linea di mira del livello con l'ausilio della livella di precisione posta sul livello stesso e si esegue la lettura L_A ; si ruota quindi il cannocchiale sino a collimare la stadia posta in B, si ricentra la livella e si esegue la lettura L_B .

Il dislivello sarà:

$$\Delta_{AB} = L_B - L_A$$

perché le visuali realizzate collimando le stadie in A ed in B sono orizzontali e perciò parallele alla superficie di riferimento.

Quando si deve misurare il dislivello fra punti la cui distanza sia superiore ai 100 m o fra punti non visibili fra loro si eseguono più battute di livellazione (linea di livellazione).

Si divide cioè la loro distanza in tratti per ciascuno dei quali si esegue una battuta dal mezzo.

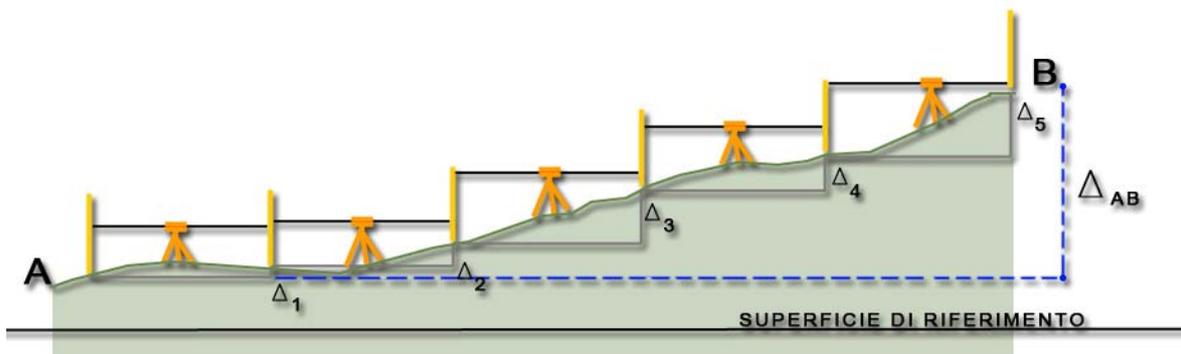


Fig.15: Schema di una livellazione composta.

Nella determinazione di un dislivello concorrono errori dovuti a cause diverse (meccanica dello strumento, precisione della livella, ecc.); tuttavia la causa fondamentale è l'*errore di stima* che si commette, dal momento che è possibile leggere direttamente sulle stadiie solo il cm.

Come per le poligonali, dovendo realizzare un anello di livellazione si avrà cura di verificare che l'errore di chiusura sia compreso nella tolleranza richiesta.

Livellazione trigonometrica

La L.T. è un'operazione topografica che permette di determinare la differenza di quota fra due punti A e B mediante misure angolari nel piano verticali (distanze zenitali) eseguite con il teodolite; l'operazione richiede che sia nota la distanza topografica tra i punti. Purché la visuale tra i due punti sia libera, essi possono essere anche molto distanti fra loro (qualche chilometro) e tra di essi può esservi anche un forte dislivello (centinaia o anche migliaia di metri).

La livellazione si chiama trigonometrica perché viene principalmente impiegata per determinare i dislivelli fra punti delle reti di inquadramento (reti trigonometriche) fra i quali sono appunto note le distanze; naturalmente si può eseguire una livellazione trigonometrica anche quando la distanza è nota per altra via, per esempio misurata con un distanziometro, a onde.

Poiché la distanza fra A e B non supera in genere una decina di chilometri, le formule che permettono di dedurre il dislivello, note le distanze zenitali Z_A e Z_B e la distanza S , possono essere ricavate assumendo come superficie di riferimento la sfera locale dove il raggio del meridiano e la grannormale vanno calcolati per una latitudine intermedia fra quelle di A e B. Si fa inoltre l'ipotesi che le verticali per i due punti coincidano con le normali alla sfera locale.

La livellazione nella sua trattazione rigorosa deve essere impostata tenendo conto della curvatura terrestre e quindi del fatto che le verticali in due differenti punti (estremi della livellazione trigonometrica) non sono parallele. E' inoltre da considerare il forte influsso della rifrazione atmosferica che tende a curvare verso il basso i raggi

ottici di collimazione per effetto delle differenze densità dell'aria (fenomeno visibile anche a poche decine di metri, anche a occhio nudo, quando ad esempio si osservano visuali radenti su superfici molto riscaldate come la sede stradale assolata nei periodi estivi).

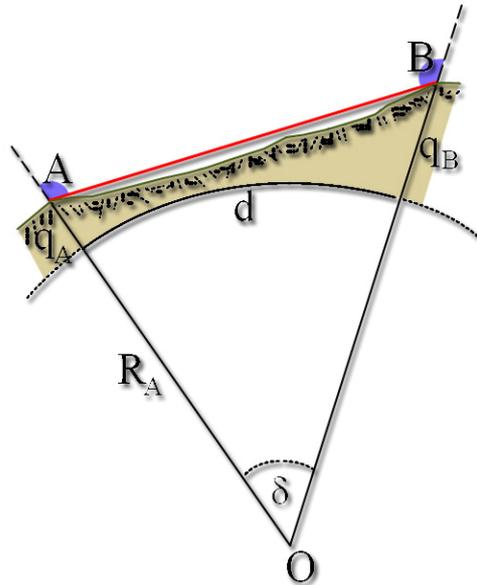


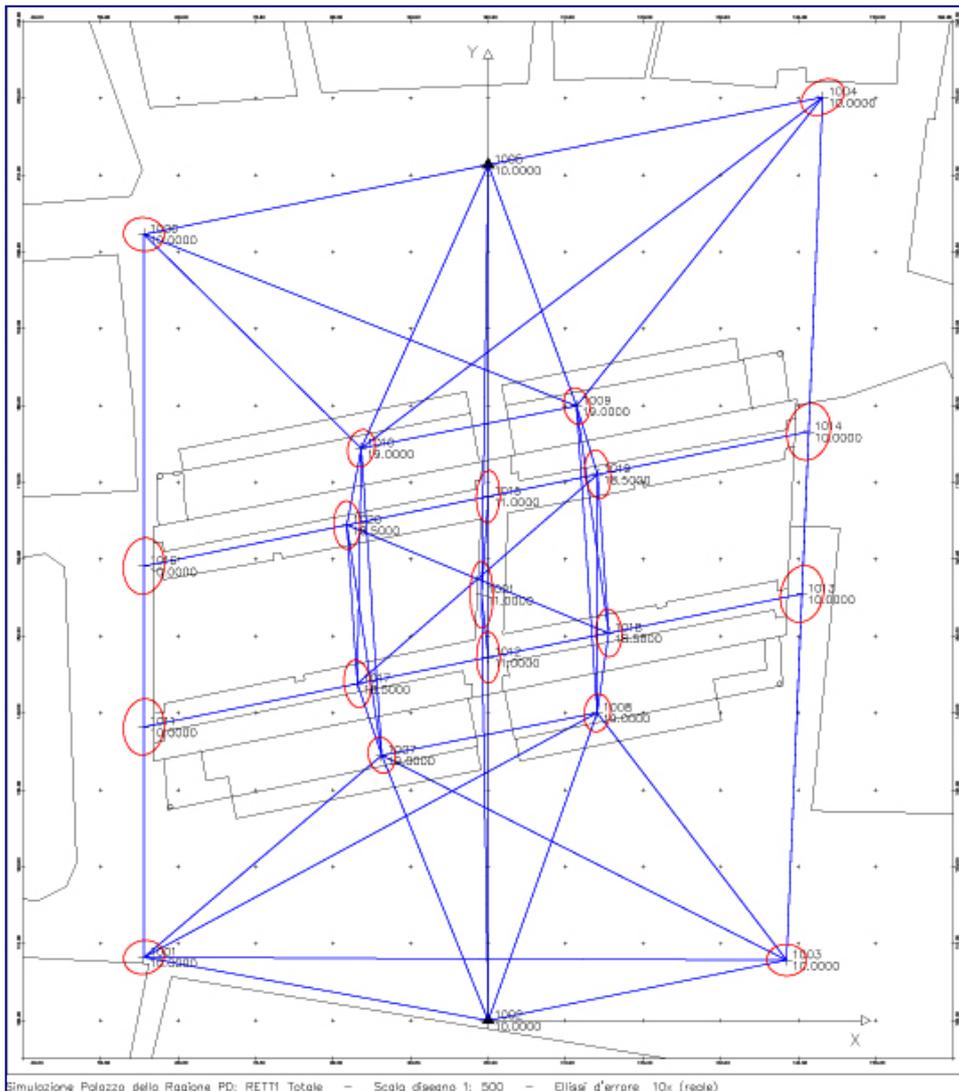
Fig.16: Schema di livellazione trigonometrica semplificato

Lo schema di livellazione trigonometrica ha il grosso vantaggio di essere assolutamente identico operativamente a quanto si esegue planimetricamente per le poligonali e per la celerimensura. Ogni lato di poligonale ed ogni punto rilevato con metodo celerimetrico possono essere rilevati altimetricamente proprio come se fossero misurati mediante livellazione trigonometrica.

Di conseguenza ogni lato di poligonale è anche misurato con metodo celerimetrico: le misure di angolo zenitale e distanza obliqua sono da considerarsi obbligatorie per determinare la distanza orizzontale che entra nella determinazione delle coordinate dei punti negli schemi di celerimensura e poligonale. La distanza orizzontale è ricavabile proprio dalla misura della distanza obliqua moltiplicata per il seno dell'angolo zenitale; l'analoga relazione con l'impiego del coseno dell'angolo zenitale va a determinare il dislivello fra centro dello strumento e punto osservato, valori che assieme alle altezze strumentali definiscono il dislivello fra i due punti rilevati.

Appendice al capitolo 4

PROGETTO PER L'ESECUZIONE DELLE RETI DI INQUADRAMENTO DEL RILIEVO IN FORMA NUMERICA ALLA SCALA 1:50 DEL PALAZZO DELLA RAGIONE IN PADOVA



Progetto:
prof. ing. Carlo Monti

Progetto delle reti di inquadramento sulla base di modelli di simulazione

1. Premessa.

Il calcolo di una rete di appoggio per il rilievo di un edificio, quale il Palazzo della Ragione, comporta la scrittura di una serie di relazioni che legano misure di direzioni angolari, di distanze, di dislivelli fra punti posizionati all'interno e all'esterno del monumento. La rete costituisce la struttura entro la quale vengono realizzate altre sottoreti che permettono sia il rilievo di dettaglio, sia il rilievo fotogrammetrico.

E' buona norma progettare la rete prima di eseguirla in quanto dal progetto, attraverso modelli di simulazione, è possibile risalire alla incertezza delle coordinate dei punti che costituiscono la rete.

Il calcolo di una rete, così come la sua simulazione, si basa sul **principio dei minimi quadrati**. Questo ha lo scopo di individuare un unico valore della grandezza misurata, parte dalla ipotesi che le osservazioni siano affette da errori puramente accidentali, che seguano una distribuzione normale e che le osservazioni siano indipendenti tra loro.

Si supponga di avere una grandezza generica x della quale si facciano n osservazioni α indipendenti e siano v gli errori di osservazione

$$v_1 = \alpha_1 - x$$

$$v_2 = \alpha_2 - x$$

.....

$$v_n = \alpha_n - x$$

Il problema è quello di determinare il valore più probabile di x sulla base delle n osservazioni α , il che equivale a trovare i valori più probabili per i v . Questi ultimi sono n variabili stocastiche, nell'ipotesi fatta di accidentalità, ciascuna delle quali segue la distribuzione normale, la cui densità di probabilità è data dalla

$$f(v_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{v_i}{\sigma_i} \right)^2}$$

Essendo le variabili indipendenti fra di loro, per il teorema delle probabilità composte che dice che la probabilità che avvengano n eventi contemporaneamente è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi, si ha che la *funzione densità di probabilità congiunta* è data dal prodotto delle varie funzioni componenti:

$$\begin{aligned} f(v_1 v_2 \dots v_n) &= \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{v_1}{\sigma_1} \right)^2} \dots \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{v_n}{\sigma_n} \right)^2} = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \left(\frac{1}{\sigma_1} \dots \frac{1}{\sigma_n} \right) e^{-\frac{1}{2} \sum_1^n \left(\frac{v_i}{\sigma_i} \right)^2} \end{aligned}$$

La funzione $f(v_1, v_2, \dots, v_n)$ densità di probabilità raggiunge il massimo del suo valore quando l'esponente raggiunge il minimo, ovvero:

$$\sum (v_i / \sigma_i)^2 = \min$$

Se introduciamo una costante arbitraria σ_0 non viene modificato il risultato della condizione di minimo, in quanto σ_0 rappresenta unicamente un fattore di scala:

$$\sum \sigma_0^2 v_i^2 / \sigma_i^2 = \min$$

Chiamando con p_i la quantità σ_0^2 / σ_i^2 , detta *peso* dell'osservazione, la condizione dei minimi quadrati diventa:

$$\sum p_i v_i^2 = v^t p v = \min$$

Una osservazione che abbia varianza $\sigma_i^2 = \sigma_0^2$ ha *peso 1* e perciò σ_0^2 è chiamata *varianza dell'unità di peso*.

2. Principio dei minimi quadrati

Il principio dei minimi quadrati è applicato, come nel nostro caso, tutte le volte che si hanno un numero di equazioni linearmente indipendenti maggiore del numero di variabili indipendenti.

I sistemi sovradeterminati non hanno una soluzione esatta e quindi si cerca la soluzione migliore.

Si supponga, nei casi pratici che riguardano le misure che si possono compiere per fare un rilievo e cioè, misure di distanza, di direzione angolare e di dislivello, di poter scrivere per ognuna delle n misure una relazione del tipo $f_i(x, \alpha) = 0$, dove x è il vettore delle m incognite x_k ed α_j il vettore delle r quantità misurate.

A causa degli errori di misura presenti nelle quantità α_j , errori che riterremo accidentali, ovvero escludendo a priori errori sistematici e grossolani, le relazioni su scritte non saranno rigorosamente nulle, ma avranno come residuo un vettore v composto da n elementi v_i . In poche parole, se risolvessimo nel sistema sovradeterminato un numero di equazioni eguale al numero m delle incognite x_k avremmo un sistema esattamente determinato. Queste soluzioni delle incognite x_k , però, se si sostituissero nelle rimanenti $n-m$ ($n > m$) equazioni del sistema sovradeterminato non darebbero luogo a equazioni identicamente nulle, ma a dei residui v dovuti agli errori di misura sempre presenti nelle quantità α .

Conviene pertanto ritenere le equazioni del sistema sovradeterminato uguali a dei residui v_i incogniti e far sì che questi, con un criterio probabilistico, siano tali da assegnare alle incognite x_k una alta probabilità di avvicinarsi alla misura "vera".

Il criterio probabilistico è quello dei minimi quadrati applicato agli scarti v delle equazioni alle osservazioni.

Il sistema sovradeterminato è del tipo $f(x, \alpha) = v$ dove ogni equazione alle misure o osservazioni è del tipo $f_i(x, \alpha) = v_i$.

Vi sono due problemi da risolvere subito.

Il primo è che non tutte le equazioni del sistema "contano allo stesso modo", occorre cioè pesarle.

Il secondo è che le equazioni molto spesso non si presentano in forma lineare e occorre perciò linearizzarle.

La soluzione al secondo problema è semplice in quanto se si suppone che le quantità misurate α_j non siano eccessivamente disperse, ovvero siano affette da errori piccoli, anche le x_k non differiranno molto fra di loro.

Sarà perciò possibile trovare dei valori approssimati delle incognite x e operare un cambiamento di variabile del tipo $x = x_0 + \delta x$ sviluppabile in serie di Taylor arrestata al 1° ordine.

Esplicitando una equazione $f_i(x, \alpha) = v_i$ generica del sistema si ha:

$$f_i(x_0, \alpha) + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right]_0 \delta x_1 + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_2} \right]_0 \delta x_2 + \dots + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_m} \right]_0 \delta x_m = v_i$$

dove il primo termine è una quantità nota l e i coefficienti $[\partial f_i / \partial x_k]$ delle nuove incognite δx_k costituiscono una matrice A funzione delle quantità α .

Il nuovo sistema linearizzato o lineare assume la forma

$$A \delta x + l = v$$

in m incognite x e n incognite v .

Il primo problema, quello dei pesi delle equazioni, può essere ricondotto alla determinazione della varianza del termine noto l , praticamente uguale a quella degli scarti v . Il peso da assegnare a ciascuna equazione è perciò inversamente proporzionale alla varianza del termine noto.

La matrice dei pesi P è una matrice diagonale in cui tutti i termini fuori diagonale sono nulli.

Il sistema sottodeterminato $A \delta x + l = v$, associato alla condizione di minimo pesato della somma degli scarti al quadrato $\sum p v^2$, dà luogo ad un sistema esattamente determinato di m incognite in m equazioni, detto *sistema normale*, la cui soluzione è data da:

$$\delta x = - (A^t P A)^{-1} A^t P l$$

La stima delle varianze σ_k^2 delle incognite δx_k è data dai termini diagonali h_{kk} della matrice quadrata $(A^t P A)^{-1}$ moltiplicati per un termine σ_0^2 detto *varianza dell'unità di peso a posteriori*. Questo è formato dalla sommatoria degli scarti pesati al quadrato calcolati dopo la soluzione del sistema normale, divisi per la ridondanza del sistema $(n-m)$, ovvero

$$\sigma_0^2 = \sum p v^2 / n - m = v^t p v / n - m$$

Le correlazioni C_{ik} fra le incognite determinate sono date dal σ_0^2 moltiplicato per i termini fuori diagonale h_{ik} .

$$C_{ik} = \sigma_0^2 h_{ik}$$

I problemi di compensazione delle reti vengono qui affrontati col metodo delle osservazioni indirette per variazioni di coordinate, metodo di gran lunga più conveniente in quanto compensa direttamente le coordinate dei vertici di rete e fornisce la loro incertezza o varianza.

3. Teoria della simulazione

La simulazione di una rete è una operazione che occorre fare dopo aver localizzato la posizione dei vertici della rete e la loro intervisibilità, con accurati sopralluoghi.

Per quanto sopra detto a proposito della compensazione di sistemi ridondanti col metodo delle osservazioni indirette ai minimi quadrati, si può osservare che l'inversa $(A^t P A)^{-1}$ dipende unicamente dalla matrice A che è determinata dalle coordinate dei punti e dai legami fra di essi e dalla matrice dei pesi, scelti in funzione della varianza delle misure.

L'inversa pertanto è costruibile indipendentemente dalle misure stesse.

Nella matrice $(A^t P A)^{-1}$ non sono presenti elementi stocastici. I coefficienti della matrice di osservazione A esprimono i rapporti funzionali tra le varie incognite (coordinate dei vertici), cioè come le une si collegano alle altre nel modello funzionale. Nel caso di una rete questi coefficienti derivano esclusivamente dalla geometria della rete stessa e sono noti ancora prima di iniziare la campagna di misure, una volta che si siano individuate le posizioni anche approssimate dei vertici di rete. Il fattore di varianza funge solo da parametro di scala.

E' quindi possibile conoscere a priori le precisioni delle incognite, o meglio i rapporti fra le precisioni delle medesime ancor prima di fare le misure, il tutto a meno di un fattore di scala unico per tutti i vertici di rete (le incognite).

Sulla base di queste considerazioni è possibile appunto redigere il progetto delle reti. Questo consiste nel simulare situazioni, precisioni strumentali, collegamenti, geometrie e modificarle fin tanto che le precisioni soddisfano i requisiti del progetto e lo verificano nella sua consistenza e aderenza alla realtà.

Analiticamente possiamo fare questa considerazione:

$$\sigma^2(x_k) = \sigma_0^2 (A^t P A)^{-1}$$

dove i pesi p della matrice diagonale P si possono porre uguali a

$$p_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2 = \overline{p}_i \overline{\sigma_0^2}$$

e $\overline{\sigma_0^2}$ è un valore assolutamente arbitrario.

Si ha:

$$\begin{aligned} \sigma^2(x_k) &= v^t \left(\overline{p}_i \overline{\sigma_0^2} \right) v / n-m \times (A^t \left(\overline{p}_i \overline{\sigma_0^2} \right) A)^{-1} = \\ &= \overline{\sigma_0^2} v^t \overline{p}_i v / n-m \times \left(\overline{\sigma_0^2} \right)^{-1} (A^t \overline{P} A)^{-1} = \\ &= v^t \overline{p} v / n-m \times (A^t \overline{P} A)^{-1} \end{aligned}$$

essendo $\overline{\sigma_0^2}$ uno scalare.

La quantità $v^t p v / n-m$ è mediamente uguale a 1 ed è ciò che si impone nei programmi di simulazione, perché vale come sempre l'ipotesi che le osservazioni siano affette da errori accidentali, che la distribuzione di questi sia normale, che a priori siano state

stimate correttamente le deviazioni standard σ o e.q.m. delle osservazioni e che queste siano congruenti ai tipi di legame fra i punti.

In questa ipotesi realistica la quantità $\sqrt{pv/n-m}$ rappresenta la distribuzione standard della popolazione. Ha cioè media nulla e varianza unitaria.

Gli scarti $\sqrt{pv/n-m}$ sono l'equivalente della $(x-\bar{x})^2/\sigma^2$, che definisce appunto una distribuzione standard.

4. Rappresentazione numerica e grafica della simulazione

In generale la rappresentazione dei dati numerici avviene attraverso i medesimi tabulati che rappresentano la compensazione delle reti, con alcune differenze dovute al fatto che si tratta di una simulazione e non di una compensazione vera e propria.

Nel caso del Palazzo della Ragione sono stati usati due software diversi come impostazione teorica, ma entrambi basati sul principio dei minimi quadrati.

Il primo è il programma *Rete*, programma che può simulare o compensare reti nel piano (compensazione planimetrica) o nello spazio (compensazione plano-altimetrica), prendendo qualsiasi tipo di osservazione vera. Si intende qui dire che, ad esempio, il programma non accetta angoli in quanto essi provengono dalla differenza di due direzioni direttamente osservate, mentre accetta ovviamente le direzioni angolari. La possibilità di compensare tridimensionalmente è significativa quando i dislivelli in gioco sono rilevanti e quindi anche le misure di distanza zenitale hanno un certo peso sulle componenti orizzontali.

L'altro programma è lo ***Star Net Plus Adjustment*** il quale accetta tutti i tipi di osservabili, angoli compresi. Compensa separatamente l'altimetria e la planimetria.

Entrambi i programmi sono largamente sperimentati e di sicura affidabilità. Il motivo del doppio impiego è dovuto oltre che a motivi di verifica funzionale anche alla verifica della influenza dell'altimetria sulla planimetria.

I dati d'input sono le varianze (incertezze) degli strumenti che si intendono impiegare, strumenti comunque del "primo ordine", i tipi di collegamenti, i vincoli.

L'output sono gli *errori quadratici medi* e.q.m. (σ o deviazione standard) delle coordinate x,y,z dei punti della rete, scelto un sistema di riferimento locale. Sono altresì dati i parametri delle ellissi d'errore in chiaro e in grafico (*Star Net Plus*) o solo in grafico (*Rete*), ma per quest'ultimo sui tre piani xy,xz,yz .

L'ellisse d'errore visualizza la indeterminazione di posizione di un punto nel piano o nello spazio. Nel caso del piano sia

$$\Sigma_x = \begin{vmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{vmatrix}$$

la matrice di varianza-covarianza $\sigma_0^2 (A^t PA)^{-1}$ delle coordinate x,y di un punto P .

Si definisce ellisse standard di errore quella ellisse avente il centro nel punto $P(x,y)$ e semiassi maggiore e minore rispettivamente

$$\sigma_{\max}^2 = \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}}{2}$$

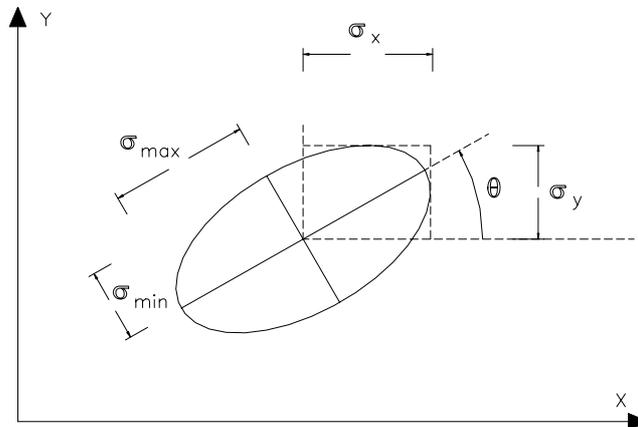
$$\sigma_{\min}^2 = \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}}{2}$$

Chiamato con θ l'angolo formato dall'asse delle x con il semiasse maggiore dell'ellisse vige la relazione

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

Analogamente si possono calcolare le ellissi sui piani xz , yz .

Statisticamente il punto (vertice di rete) ha il 38% di probabilità di essere all'interno dell'ellisse standard e il 99% di probabilità di essere all'interno di una ellisse con semiasse tripli.



4. Le simulazioni per il Palazzo della Ragione

Dopo un accurato sopralluogo sono state ipotizzate le posizioni dei vertici della rete d'appoggio principale, posizioni che, salvo piccole variazioni dovute a fatti contingenti, saranno quelle definitive. La scelta dei punti obbedisce al criterio della ottimizzazione delle operazioni di misura che devono essere sempre ridondanti. Si è ipotizzato l'uso di teodoliti del primo ordine abbinati a distanziometri di prestazioni coerenti con la misura angolare. Le deviazioni standard di input, dopo varie ipotesi, sono state fissate in 10 *decimillesimi* di grado per le direzioni angolari sul piano azimutale, 20 *decimillesimi* di grado per le direzioni angolari sul piano verticale (distanze zenitali), 2mm per le distanze. Questi valori sono realistici in quanto gli strumenti che si andranno ad usare hanno una incertezza intrinseca nettamente più bassa. La simulazione prevede un sistema di riferimento cartesiano xy dove viene fissato il punto origine (peso infinito) e la direzione dell'asse y . Si è quindi configurato lo schema base di "rete libera" che è il meno vincolato e quindi quello che esprime meglio la propagazione degli errori, ma anche altri schemi logici. Tutti i punti sono collegati in andata e ritorno attraverso i tre tipi di misura citati.